Feuille 1 : Polynômes

Divisibilité

Exercice 1. * Pour chacun des polynômes suivants, dresser la liste complète des polynômes le divisant dans l'anneau de polynômes précisé :

1) $X+1$ dans $\mathbb{R}[X]$	2) X^2-1 dans $\mathbb{R}[X]$	3) X^2+1 dans $\mathbb{C}[X]$
4) X^2+1 dans $\mathbb{R}[X]$	5) $2X+4$ dans $\mathbb{Q}[X]$	6) $2X+4$ dans $\mathbb{Z}[X]$

Exercice 2. * Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note R le reste de la division euclidienne de P par $X-7$. Montrer que $R = P(7)$.

Exercice 3. Soit a et b deux réels distincts et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note λ et μ les restes respectifs de la division euclidienne de P par $X-a$ et par $X-b$.
Exprimer à l'aide de λ et μ le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$.
Qu'a-t-on montré dans le cas particulier où $\lambda = \mu = 0$?
Pourquoi l'hypothèse $a \neq b$ est-elle importante ?

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ de degré inférieure ou égal a 3, qui sont divisibles par $X-1$ et qui sont tels que les trois restes de leurs divisions euclidiennes repectives par $X-2$, par $X-3$ et par $X-4$ sont égaux.

Exercice 5. * Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^{5n} par X^5-1.
2. En déduire le reste de la division euclidienne de $X^{99}+2X^{42}-3X^{35}-2X^{27}+3$ par X^5-1.

Exercice 6. Soient a un nombre réel et $n \geq 1$ un entier. On pose $A = (X\sin a + \cos a)^n$. Déterminer le reste de la division euclidienne de A par X^2+1.

Définition des polynômes

Exercice 7. * Quels sont les polynômes de degré au plus un sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Et sur le corps $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$? Combien y-a-t-il de polynômes de degré au plus 5 sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$? Généraliser.

PGCD, PPCM, algorithme d'Euclide

Exercice 8. * A l'aide de l'algorithme d'Euclide déterminer le PGCD dans $\mathbb{R}[X]$ des polynômes

$$A = X^4+2X^3-X-2 \quad \text{et} \quad B = X^5-5X^3-9X^2-8X-3$$

et en déduire des polynômes U et V tels que

$$AU + BV = \mathrm{PGCD}(A,B).$$

Exercice 9. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soient A, B et C trois polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Montrer que si $A \mid C$, $B \mid C$ et PGCD(A, B) $= 1$, alors $AB \mid C$.

Exercice 10. Calculer le PGCD de A et B dans $\mathbb{R}[X]$ pour :

1) $A = 2X^4 - 11X^3 + 13X^2 + 24X - 14$ et $B = X^2 - X - 1$

2) $A = X^4 + 2X^3 - 11X^2 - 12X + 36$ et $B = X^3 + 3X^2 - X - 3$.

Racines

Exercice 11. * Quelles sont les racines de $X^5 - X$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$? de X^2 dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$? de $X^2 - X$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?

Exercice 12. Montrer que le polynôme $X^{163} + 24X^{57} - 6$ a au moins une racine sur $\mathbb{R}$. A-t-il des racines dans $\mathbb{Q}$? Même exercice avec le polynôme $X^7 + 3X^2 + 2$.

Exercice 13.
1. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $deg(P) = deg(Q) = n$.
   On suppose qu'il existe k valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_k$ avec $k > n$ tel que $P(x_i) = Q(x_i)$. Montrer que $P = Q$.
2. Soient (a_0, b_0), (a_1, b_1),..., (a_n, b_n), $n + 1$ points du plan $\mathbb{R}^2$ tels que les a_i sont distincts deux àdeux. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré n tel $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$. (On appelle P polynôme d'interpolation de Lagrange).

Facteurs irréductibles et leurs usages

Exercice 14. * Factoriser en produit de facteurs irréductibles les polynômes suivants

1. $X^4 - 16$ dans $\mathbb{C}[X]$
2. $X^4 - 16$ dans $\mathbb{R}[X]$
3. $X^{11} + 2^{11}$, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$
4. $X^4 + j$ dans $\mathbb{C}[X]$ où $j := e^{\frac{2\pi i}{3}}$.
5. $P = X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X + 31$, dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$. Pour cette dernière question, on commencera par déterminer des nombres réels a et b tels que $P = X^5 - 5X^4 + 10X^3 - 10X^2 + 5X + 31 = (X + a)^5 + b$

Exercice 15. *

1. Est-ce que 1 est racine du polynôme réel $P = X^3 + X^2 + X + 1$? Qu'en est-il de -1? Trouver toutes les racines de P sur le corps $\mathbb{C}$.
2. Soit n un entier non nul. Quelles sont les racines du polynôme $1 + X + \cdots + X^n$ sur $\mathbb{C}$?
3. Décomposer $X^6 + 1$ en un produit de facteurs du premier degré dans $\mathbb{C}[X]$. Que peut-on faire dans $\mathbb{R}[X]$? dans $\mathbb{Q}[X]$?

Exercice 16. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 17. * Calculer le PGCD de $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ et $Q = X^4 - 1$ dans $\mathbb{Q}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 18. * Pour quelles valeurs de l'entier $n \geq 1$ le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ $P = X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

Racines multiples

Exercice 19. * Soit P le polynôme réel : $P = X^6 + 4X^5 + 8X^4 + 10X^3 + \alpha X^2 + 4X + 1$. On suppose que -1 est une racine de P.

1. Déterminer α.
2. Montrer que -1 est une racine double de P.
3. Montrer que j est une racine multiple de P.
4. Factoriser P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 20. Déterminer une valeur du complexe λ pour laquelle le polynôme $P_\lambda = (X+1)^5 - X^5 - \lambda$ admette au moins une racine multiple. Pour cette valeur de λ, décomposer alors P_λ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{C}[X]$ ou sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 21. Pour tout complexe a, on pose $P_a = 2X^3 + 3X^2 + 6X + a \in \mathbb{C}[X]$.

1. Calculer un PGCD de P_a et P'_a.
2. Pour quelles valeurs de a le polynôme P_a admet-il une racine double? Pour chacune de ces valeurs, décomposer P_a en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 22. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, de degré $n \geq 1$. On note x_i les racines de P, où $1 \leq i \leq p$ (p désignant le nombre de racines distinctes). On note enfin α_i la multiplicité de x_i comme racine de P.

1. Que vaut la somme $\alpha_1 + \cdots + \alpha_p$?
2. Montrer que si $P' \mid P$, alors $p = 1$. En déduire l'ensemble des polynômes à coefficients complexes divisibles par leur dérivé.

Relations entre racines et coefficients

Exercice 23. * Soit $P = X^3 + 3X^2 + 2X + i \in \mathbb{C}[X]$.

1. Prouver que P n'a pas de racine réelle.
2. Soient α, β et γ les trois racines complexes de P. Calculer $\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ et $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

Exercice 24. Soient α, β et γ les racines complexes du polynôme $P = X^3+3X^2+X+1$.

1. Écrire les relations reliant les racines et les coefficients de P.

2. Quelle est la valeur de $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + 3\alpha\beta$?

Exercice 25.

1. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ et α_5 les cinq racines (complexes) du polynôme
$$P = X^5 - 29X^4 + 117X^3 - 11X^2 + 4X + 1.$$
Justifier que tous les nombres α_i sont non nuls puis écrire le polynôme unitaire de degré 5 dont $\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \alpha_3^{-1}, \alpha_4^{-1}$ et α_5^{-1} sont les racines.

2. Soient p, q, r trois nombres complexes, r étant non nul. Soit $P = X^4+pX^2+qX+r$ et soient a, b, c, d les racines de P.

   Justifier que les racines de P sont toutes non nulles puis calculer $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} + d^{-1}$ et $a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} + d^{-2}$.

Trucs en vrac

Exercice 26. Cet exercice a pour objet la détermination de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui satisfont à l'identité $(*)$:
$$(X + 3)P(X) = XP(X + 1).$$

1. Soit P un polynôme vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = XQ$.

2. Déterminer $Q(-1)$ puis $Q(-2)$.

3. En déduire que P est nécessairement de la forme $aX^m(X + 1)^n(X + 2)^p$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n,\ m,\ p \in \mathbb{N} - \{0\}$.

4. Démontrer finalement que P vérifie $(*)$ si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX(X + 1)(X + 2)$.

Exercice 27. Étant donné un entier naturel $n \geq 1$, on note P_n le polynôme (à coefficients rationnels)
$$1 - \frac{X}{1!} + \frac{X(X-1)}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{X(X-1)(X-2)\ldots(X-n+1)}{n!}.$$

1. Quel que soit $m \in \mathbb{N}$, vérifier l'identité $\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k} = 0$.

2. Déterminer les racines des polynôme P_n. (*Indication* : pour se faire une idée, on pourra commencer par calculer $P_n(1)$ et $P_n(2)$ en supposant $n \geq 2$.)

3. Factoriser P_n dans $\mathbb{Q}[X]$.