Math II Algèbre

Examen du 15 juin 2010 - 2 heures

Exercice 1. Les polynômes considérés dans cet exercice sont dans $\mathbb{Q}[X]$.

1. Montrer que 1 est racine simple de $X^3 + X - 2$.
   En déduire PGCD$(X^3 + X - 2, X^2 - 2X + 1)$.
2. En utilisant l'algorithme d'Euclide et éventuellement la question 1, trouver le polynôme PGCD$(X^5 + X^3 - X^2 - 2X + 1, X^3 + X - 2)$.

Exercice 2. Soit $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, et soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}[X]$ l'application définie par :

$$f(P) = X(X+1)P'' + (X+2)P' - P.$$

1. Calculer $f(1), f(X)$, et $f(X^2)$ et en déduire qu'on peut restreindre f en un endomorphisme qu'on notera $g : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ par la suite.
2. Donner la matrice de g dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Calculer le $rang(g)$ et donner une base de $Im(g)$.
4. L'endomorphisme $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ est-il surjectif ? Motiver votre réponse.

Exercice 3. Soit $u : E \to F$ une application linéaire. On rappelle que $u(0) = 0$. Montrer que :

1. Si u est injective alors $Ker(u) = \{0\}$.
2. Si $Ker(u) = \{0\}$ alors u est injective.

Exercice 4. Soit $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire, et $e = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. La matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la suivante :

$$mat_e(\varphi) = A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe et déterminer un vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^3$ tel que tel que $Ker(\varphi) = Vect(a)$.
2. Déterminer un vecteur $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $a = \varphi(b)$.
3. Montrer que $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner un vecteur non nul $c \in E_1$.
5. Montrer que $e' = (a, b, c)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice $T = mat_{e'}(\varphi)$ de φ dans la base e'.
7. Donner la matrice de passage de la base e à la base e', notée Q.
8. Pourquoi la matrice Q est-elle inversible ? Calculer Q^{-1}.
9. Donner la relation entre A, T et Q.
10. Calculer le déterminant de T. En déduire le déterminant de A.