Devoir surveillé 2 printemps 2010
Math II algèbre. Durée 1 heure

Exercice 1 :
Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0\}$
Soit $a = (1,2,-3)$, et $F = Vect(a)$
1°) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, et déterminer une base de cet espace-vectoriel.
2°) A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^3$?
On justifiera la réponse.

Exercice 2 :
Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ x_1 + x_3 = 0 \quad et \quad x_2 + x_4 = 0\}$
Soient $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$ et $u_3 = (1,0,1,0)$
Soit $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$
On admettra que E est un espace vectoriel.
1°) Donner une base de E et en déduire sa dimension.
2°) Déterminer une base de F.
3°) Donner une (ou plusieurs) équation(s) qui caractérise(nt) F.
4°) Donner une famille génératrice de $E + F$.
5°) Montrer que : $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Exercice 3 :
Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X], P(1) = 0\}$
1°) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2°) Donner une base de E et en déduire sa dimension.

Exercice 4 :
Soit $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie pour tout vecteur $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par :

$$f(u) = (-2x + y + z, x - 2y + z)$$

1°) Montrer que f est une application linéaire.
2°) Donner une base de $Ker(f)$, en déduire $\dim\big(Im(f)\big)$.
3°) Donner une base de $Im(f)$.

Exercice 5 :
Soient $u_1 = (2,1,1)$, $u_2 = (1,2,-1)$, $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (1,-1,-2)$ quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer une sous famille de (u_1, u_2, u_3, u_4) libre et qui engendre $E = Vect(u_1, u_2, u_3, u_4)$, en déduire la dimension de E.