Corrigé de devoir maison 2

a) Montrer que le polynôme $A = X^3 - 19X + 30$ est divisible par $X - 2$ dans $\mathbb{R}[X]$.
b) Donner la décomposition de A en produit de facteurs de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$.
c) Soient p et q deux nombres réels et α, β et γ les trois racines complexes du polynôme $P = X^3 + pX + q$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k$$

Calculer S_0, S_1 et S_2 en fonction de p et q.
Indication : utiliser les relations entre les racines et les coefficients.
d) Montrer que pour tout $k \geq 3$,

$$S_k = -pS_{k-2} - qS_{k-3} \qquad (1)$$

En déduire de (1) les expressions de S_3, S_4 et S_5 en fonction de p et q.
e) Déduire des questions précédentes les solutions réelles du système d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = -90 \\ x^5 + y^5 + z^5 = -2850 \end{cases}$$

Corrigé
a) $A(2) = 2^3 - 19 \times 2 + 30 = 8 - 38 + 30 = 0$
Donc A est divisible par $X - 2$.
b)

$X^3 - 19X + 30$	$X - 2$
$X^3 - 2X^2$	$X^2 + 2X - 15$
$2X^2 - 19X + 30$	
$2X^2 - 4X$	
$-15X + 30$	
$-15X + 30$	
0	

Il reste à trouver les racines de $X^2 + 2X - 15 = 0$, c'est-à-dire -5 et 3.

$$X^3 - 19X + 30 = (X - 2)(X - 3)(X + 5)$$

c) On rappelle que $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma) = X^3 - (\alpha + \beta + \gamma)X^2 + (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)X - \alpha\beta\gamma$
Donc $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$ et $\alpha\beta\gamma = -q$

$$S_0 = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$S_1 = \alpha + \beta + \gamma = 0$$
$$S_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = -2p$$

d)

$$S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k = \alpha^{k-3}\alpha^3 + \beta^{k-3}\beta^3 + \gamma^{k-3}\gamma^3$$
$$= \alpha^{k-3}(-p\alpha - q) + \beta^{k-3}(-p\beta - q) + \gamma^{k-3}(-p\gamma - q)$$

Car $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$ entraine que $\alpha^3 = -p\alpha - q$, idem pour β^3 et γ^3.
Donc

$$S_k = \alpha^{k-3}(-p\alpha - q) + \beta^{k-3}(-p\beta - q) + \gamma^{k-3}(-p\gamma - q)$$
$$= -p\alpha^{k-2} - q\alpha^{k-3} - p\beta^{k-2} - q\beta^{k-3} - p\gamma^{k-2} - q\gamma^{k-3} = -pS_{k-2} - qS_{k-3}$$
$$S_3 = -pS_1 - qS_0 = -3q$$
$$S_4 = -pS_2 - qS_1 = 2p^2$$

$$S_5 = -pS_3 - qS_2 = 3pq + 2pq = 5pq$$

e) x, y et z vérifient $x + y + z = 0$, ils sont les trois racines du polynôme $X^3 + pX + q = 0$ avec $p = xy + xz + yz$ et $q = -xyz$.

En utilisant la notation $S_k = x^k + y^k + z^k$, le système devient :

$$\begin{cases} S_1 = 0 \\ S_3 = -90 \\ S_5 = -2850 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ -3q = -90 \\ 5pq = -2850 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 30 \\ pq = -570 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 30 \\ p = -19 \end{cases}$$

Cela signifie que x,y et z sont les solutions de $X^3 - 19X + 30 = 0$, ce sont donc les racines que l'on a trouvé au b), en faisant toutes les permutations possibles :

$$(x, y, z) \in \{(-5,2,3), (-5,3,2), (2,-5,3), (2,3,-5), (3,-5,2), (3,2,-5)\}$$