Contrôle continu 3
Math II algèbre printemps 2010
Le 20 Mai 2010
Durée 1 heure

Exercice 1 :
Soit $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&1&0\\-3&2&2\end{pmatrix}$
Calculer A^{-1}
Correction

$$AX=Y\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&1&0\\-3&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=y_1\\-2x_1+x_2=y_2\\-3x_1+2x_2+2x_3=y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-2L_1\\L_3-3L_1\end{matrix}\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=y_1\\-x_2-2x_3=-2y_1+y_2\\-x_2-x_3=-3y_1+y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=y_1\\-x_2-2x_3=-2y_1+y_2\\x_3=-y_1-y_2+y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=x_2+x_3-y_1\\x_2=-2x_3+2y_1-y_2=-2(-y_1-y_2+y_3)+2y_1-y_2\\x_3=2y_1-y_2+y_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=(4y_1+y_2-2y_3)+(-y_1-y_2+y_3)-y_1\\x_2=4y_1+y_2-2y_3\\x_3=-y_1-y_2+y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=2y_1-y_3\\x_2=4y_1+y_2-2y_3\\x_3=2y_1-y_2+y_3\end{cases}$$

Donc $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\4&1&-2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$

Exercice 2 :
Soit (e_1,e_2,e_3,e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
Soit $A=\begin{pmatrix}-6&-24&12&0\\4&12&-6&2\\4&8&-4&4\\4&12&-6&2\end{pmatrix}$
Soit $u:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ une application dont la matrice dans la base canonique est A.
Soit $E_2=\{x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4, u(x)=2x\}$
1°) Déterminer une base (a,b) du noyau de u et en déduire sa dimension.
2°) Déterminer une base de l'image de u.
3°) Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base (c,d).
4°) Montrer que $E_2\oplus Ker(u)=\mathbb{R}^4$
5°) Déduire de 4°) que $\beta'=(a,b,c,d)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
6°) Donner la matrice D de u dans la base β'.
Correction
1°)

$$u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\Leftrightarrow AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-6&-24&12&0\\4&12&-6&2\\4&8&-4&4\\4&12&-6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-6x_1-24x_2+12x_3=0\\4x_1+12x_2-6x_3+2x_4=0\\4x_1+8x_2-4x_3+4x_4=0\\4x_1+12x_2-6x_3+2x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}-x_1-4x_2+2x_3=0\\2x_1+6x_2-3x_3+x_4=0\\x_1+2x_2-x_3+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+2L_1\\L_3+L_1\end{matrix}\begin{cases}-x_1-4x_2+2x_3=0\\-2x_2+x_3+x_4=0\\-2x_2+x_3+x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-x_1-4x_2+2x_3=0\\-2x_2+x_3+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-4x_2+2x_3\\x_2=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-2x_4\\x_2=\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(-2x_4,\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}x_4,x_3,x_4\right)=\frac{1}{2}x_3(0,1,2,0)+\frac{1}{2}x_4(-4,1,0,2)$$

$a=(0,1,2,0)$ et $b=(-4,1,0,2)$ sont deux vecteurs non colinéaires qui engendrent $\ker(u)$, ces vecteurs forment une base de $\ker(u)$. $\dim(ker(u))=2$

2°) D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(\mathbb{R}^4)\Leftrightarrow\dim\big(Im(u)\big)=2$$

Il suffit de trouver deux vecteurs de $Im(u)$ non colinéaires, $u(e_1)=-6e_1+4e_2+4e_3+4e_4$ et $u(e_2)=-24e_1+12e_2+8e_3+12e_4$ ne sont pas proportionnels et sont dans $Im(u)$, ils forment une base de $Im(u)$.

3°) Soit x et x' deux vecteurs de E_2, $u(x)=2x$ et $u(x')=2x'$.

$$u(\lambda x+\lambda' x')=\lambda u(x)+\lambda' u(x')=\lambda(2x)+\lambda'(2x)=2(\lambda x+\lambda' x')$$

Donc $\lambda x+\lambda' x'\in E_2$

Et $u(0_{\mathbb{R}^4})=0_{\mathbb{R}^4}=2\times 0_{\mathbb{R}^4}$, donc $0_{\mathbb{R}^4}\in E_2$.

E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)\in E_2\Leftrightarrow AX=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-6&-24&12&0\\4&12&-6&2\\4&8&-4&4\\4&12&-6&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-6x_1-24x_2+12x_3=2x_1\\4x_1+12x_2-6x_3+2x_4=2x_2\\4x_1+8x_2-4x_3+4x_4=2x_3\\4x_1+12x_2-6x_3+2x_4=2x_4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-8x_1-24x_2+12x_3=0\\4x_1+10x_2-6x_3+2x_4=0\\4x_1+8x_2-6x_3+4x_4=0\\4x_1+12x_2-6x_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1-6x_2+3x_3=0\\2x_1+5x_2-3x_3+x_4=0\\2x_1+4x_2-3x_3+2x_4=0\\2x_1+6x_2-3x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}-2x_1-6x_2+3x_3=0\\2x_1+5x_2-3x_3+x_4=0\\2x_1+4x_2-3x_3+2x_4=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_2\\L_3+L_3\end{matrix}\begin{cases}-2x_1-6x_2+3x_3=0\\-x_2+x_4=0\\-2x_2+2x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x_1-6x_2+3x_3=0\\-x_2+x_4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1=3x_3-6x_4\\x_2=x_4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=\frac{3}{2}x_3-3x_4\\x_2=x_4\end{cases}$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left(\frac{3}{2}x_3-3x_4,x_4,x_3,x_4\right)=\frac{1}{2}x_3(3,0,2,0)+x_4(-3,1,0,1)$$

$c=(3,0,2,0)$ et $d=(3,1,0,1)$ sont deux vecteurs non proportionnels qui engendrent E_2, ils forment une base de E_2.

4°) $x\in E_2\cap\ker(u)\Leftrightarrow\begin{cases}u(x)=2x\\u(x)=0_{\mathbb{R}^4}\end{cases}\Rightarrow 2x=0_{\mathbb{R}^4}\Rightarrow x=0_{\mathbb{R}^4}$

Donc $E_2\cap\ker(u)=\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, comme $\dim(E_2)+\dim(\ker(u))=2+2=\dim(\mathbb{R}^4)$

On a $E_2\oplus Ker(u)=\mathbb{R}^4$.

5°) (a,b) est une base de $\ker(u)$, (c,d) est une base de E_2 et $E_2+Ker(u)=E_2\oplus Ker(u)$ donc (a,b,c,d) est une base de $E_2\oplus Ker(u)$, or $E_2\oplus Ker(u)=\mathbb{R}^4$, par conséquent (a,b,c,d) est une base de $\mathbb{R}^4$.

6°)

$u(a)=0_{\mathbb{R}^4}$, $u(b)=0_{\mathbb{R}^4}$, $u(c)=2c$ et $u(d)=2d$ on en déduit que :

$$D=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

Soit $\mathbb{R}_2[X]=\{a_0+a_1X+a_2X^2,a_i\in\mathbb{R}\}$ l'espace des polynômes réels de degré au plus 2 et soit $\mathcal{B}=(1,X,X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? On considère l'application

$$f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$$
$$P \longmapsto f(P)$$
Où $f(P)(X) = P(X+1) - P(X) = a_0 + a_1(X+1) + a_2(X+1)^2 - (a_0 + a_1X + a_2X^2)$
a) Montrer que f est linéaire.
b) Montrer que la matrice A de f par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Montrer que $\mathcal{B}' = \big(1, X-1, (X-1)(X-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
d) Trouver la matrice B de f par rapport aux bases $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}'$.
Correction
a) Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ et λ_1 et λ_2 deux réels.
$$\begin{aligned} f(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)(X) &= (\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)(X+1) - (\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)(X) \\ &= \lambda_1P_1(X+1) + \lambda_2P_2(X+1) - \big(\lambda_1P_1(X+1) + \lambda_2P_2(X+1)\big) \\ &= \lambda_1\big(P_1(X+1) - P_1(X)\big) + \lambda_2\big(P_2(X+1) - P_2(X)\big) = \lambda_1 f(P_1)(X) + \lambda_2 f(P_2)(X) \end{aligned}$$
Ce qui entraine que :
$$f(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) = \lambda_1 f(P_1)(X) + \lambda_2 f(P_2)$$
f est linéaire.
b) $f(1)(X) = 1 - 1 = 0$, $f(X)(X) = (X+1) - X = 1$ et $f(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 1 + 2X$
Donc
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X \\ X^2 \end{array}$$
c)

$$\alpha \times 1 + \beta \times (X-1) + \gamma \times (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow \gamma X^2 + (\beta - 3\gamma)X + (\alpha - \beta + 2\gamma) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta - 3\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{B}'$ est une famille libre à trois vecteurs dans un espace de dimension 3 c'est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

d)

$f(1)(X) = 0$, $f(X-1)(X) = (X-1+1) - (X-1) = 1$ et

$$\begin{aligned} f\big((X-1)(X-2)\big)(X) &= (X-1+1)(X-2+1) - (X-1)(X-2) = X(X-1) - (X-1)(X-2) \\ &= (X-1)\big(X - (X-2)\big) = 2(X-1) \end{aligned}$$

Donc

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X-1) & f\big((X-1)(X-2)\big) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ X-1 \\ (X-1)(X-2) \end{array}$$

Exercice 4 :
Soit $f : E \to F$ une application linéaire
Montrer que :
$$\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = f(\ker(f^2))$$
Correction
Soit $y \in \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et $f(y) = 0_F$
Donc $f^2(x) = f\big(f(x)\big) = f(y) = 0_F$ donc $x \in \ker(f^2)$, comme $y = f(x)$, $y \in f(\ker(f^2))$

On a montré que

$$\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) \subset f(\ker(f^2))$$

Soit $y \in f(\ker(f^2))$, il existe $x \in \ker(f^2)$ tel que $y = f(x)$, ce qui montre que $y \in Im(f)$ et comme $f(y) = f\big(f(x)\big) = f^2(x) = 0_F$ on a $y \in \ker(f)$

On a montré que

$$f(\ker(f^2)) \subset \ker(f) \cap \operatorname{im}(f)$$

Et donc

$$\ker(f) \cap \operatorname{im}(f) = f(\ker(f^2))$$