

Exercice 1

Soit $P = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

1°) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

2°) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

3°) Factoriser P dans $\mathbb{Q}[X]$.

Correction

1°)

$$P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 = \frac{1 - X^8}{1 - X}$$

Pour $X \neq 1$

Les racines de P vérifient $\begin{cases} X^8 = 1 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}}, & k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{ik\pi}{4}}, & k \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}, X_4 = e^{i\pi} = -1, X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}, X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$ et $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Donc

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X - i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + 1)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + i)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

2°)

$$\begin{aligned} P &= (X + 1)(X - i)(X + i)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) \\ &= (X + 1)(X^2 + 1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ &= (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

3°)

$$\begin{aligned} P &= (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X) = (X + 1)(X^2 + 1)\left((X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}X)^2\right) \\ &= (X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2) = (X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1) \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit $P = X^3 + pX + q$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note α, β et γ ses racines.

1°) Calculer $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

2°) Calculer $B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.

3°) Calculer $C = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2$.

Correction

1°)

On rappelle que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$ et $\alpha\beta\gamma = -q$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

Donc

$$A = 0^2 - 2p = -2p$$

2°)

$\alpha^3 + p\alpha + q = 0$ entraine que $\alpha^3 = -p\alpha - q$, idem pour β et γ .

$$B = -p\alpha - q - p\beta - q - p\gamma - q = -p(\alpha + \beta + \gamma) - 3q = -3q$$

3°)

$$C = \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \beta\gamma(\beta + \gamma) = \alpha\beta(-\gamma) + \alpha\gamma(-\beta) + \beta\gamma(-\alpha) = -3\alpha\beta\gamma = 3q$$

Exercice 3

Soit $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1°) Montrer que j est une racine multiple de P .

2°) Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.

3°) Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction

1°)

$$\begin{aligned} P(j) &= j^6 + 2j^5 + 4j^4 + 4j^3 + 4j^2 + 2j + 1 = 1 + 2j^2 + 4j + 4 + 4j^2 + 2j + 1 = 6j^2 + 6j + 6 \\ &= 6(j^2 + j + 1) = 0 \end{aligned}$$

$$P' = 6X^5 + 10X^4 + 16X^3 + 12X^2 + 8X + 2$$

$$\begin{aligned} P'(j) &= 6j^5 + 10j^4 + 16j^3 + 12j^2 + 8j + 2 = 6j^2 + 10j + 16 + 12j^2 + 8j + 2 = 18j^2 + 18j + 18 \\ &= 18(j^2 + j + 1) = 0 \end{aligned}$$

Donc j est racine double, comme P est un polynôme à coefficients réels, $\bar{j}$ est aussi racine double.

On peut essayer de voir si j ne serait pas racine triple (mais cela ne marche pas).

2°)

Soit on a l'intuition de voir que i est racine (et que donc $-i$ est aussi racine), soit on ne le voit pas et il faut diviser P par

$$\begin{aligned} (X - j)^2(X - \bar{j})^2 &= ((X - j)(X - \bar{j}))^2 = (X^2 + X + 1)^2 = X^4 + X^2 + 1 + 2X^3 + 2X^2 + 2X \\ &= X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1 \end{aligned}$$

$X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$	$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$
$X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 2X^3 + X^2$	$X^2 + 1$
$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$	
$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$	
0	

$$P = (X - j)^2(X - \bar{j})^2(X - i)(X + i)$$

3°)

$$P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 + 1)$$

Exercice 4

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n$ par $X^2 + 1$.

Correction

$$(X + 1)^n = (X^2 + 1)Q + R$$

Or $d^{\circ}R < 2$ et donc $R = aX + b$.

On pose $X = i$.

$$(i+1)^n = ai + b \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right)^n = b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \right)^n = b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n e^{\frac{ni\pi}{4}} = b + ai$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Donc

$$R = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) X + (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$