DM 3

Exercice 1 :

Soit $u\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1°) $p = 3$, $q = 2$

$u(e_1) = f_1 + 2f_2$, $u(e_2) = 2f_1 - f_2$ et $u(e_3) = -f_1 + f_2$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.

b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{f}$.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2°) $p = 3$ et $q = 3$, dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$

$u(e_1) = 3e_1 + 2e_2 + 2e_3$, $u(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + 2e_3$ et $u(e_3) = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ par u.

b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Correction

1°) a)

$$\begin{aligned} u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) \\ &= x_1(f_1 + 2f_2) + x_2(2f_1 - f_2) + x_3(-f_1 + f_2) = (x_1 + 2x_2 - x_3)f_1 + (2x_1 - x_2 + x_3)f_2 \\ &= (x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + x_3) \end{aligned}$$

b)

$$A = Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \end{array}$$

c)

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^2}$$

$$\Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ -5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2 \times \dfrac{3}{5}x_3 - x_3 = 0 \\ x_2 = \dfrac{3}{5}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{5}x_3 \\ x_2 = \dfrac{3}{5}x_3 \end{cases}$$

Donc $x = \left(-\frac{1}{5}x_3, \frac{3}{5}x_3, x_3\right) = \frac{x_3}{5}(-1,3,5)$ $Ker(u) = Vect(a)$ avec $a = (-1,3,5)$.

On en déduit que $\dim\big(Ker(u)\big) = 1$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim\big(Ker(u)\big) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 2$$

Or $Im(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donc $Im(u) = \mathbb{R}^2$.

Une autre méthode est d'écrire que :

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big)$$

Puis, avec le théorème du rang, de dire que la dimension de cet espace est 2, il suffit donc de trouver deux vecteurs non colinéaires dans $Im(u)$, soit par exemple $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ ou $\big(u(e_1), u(e_3)\big)$ ou encore $\big(u(e_2), u(e_3)\big)$, pour trouve une base (libre plus le bon nombre de vecteurs égal base). Mais je pense que si on ne remarque pas que $Im(u) = \mathbb{R}^2$ on a raté quelque chose parce que cela signifie que u est surjective.

2°) a) Soit $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{aligned} u(x) = u(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) &= x_1u(e_1) + x_2u(e_2) + x_3u(e_3) \\ &= x_1(3e_1 + 2e_2 + 2e_3) + x_2(2e_1 + 3e_2 + 2e_3) + x_3(2e_1 + 2e_2 + 3e_3) \\ &= (3x_1 + 2x_2 + 2x_3)e_1 + (2x_1 + 3x_2 + 2x_3)e_2 + (2x_1 + 2x_2 + 3x_3)e_3 \\ &= (3x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{aligned}$$

b) Histoire de changer de méthode je ne vais pas faire comme dans le 1°).

Les coordonnées de $u(x)$ dans la base $\underline{e}$ sont

$$\begin{pmatrix} 3x_1+2x_2+2x_3 \\ 2x_1+3x_2+2x_3 \\ 2x_1+2x_2+3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = AX$$

Où

$$A = Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

c)

$$x=(x_1,x_2,x_3) \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x_1+2x_2+2x_3 \\ 2x_1+3x_2+2x_3 \\ 2x_1+2x_2+3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 3L_2-2L_1 \\ L_3-L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 5x_2+2x_3=0 \\ -x_2+x_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 5L_3+L_2 \end{matrix} \begin{cases} 3x_1+2x_2+2x_3=0 \\ 5x_2+2x_3=0 \\ 7x_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases}$$

Donc $Ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

On peut utiliser le théorème du rang, mais je vais faire plus théorique (pour rire), u est un endomorphisme dont le noyau est réduit au vecteur nul, c'est donc une bijection, donc u est surjective et $Im(u)=\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 :

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e}=(e_1,\dots,e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f}=(f_1,\dots,f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1°) $p=2$, $q=3$

$$A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x=(x_1,x_2)$ par u.

b) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$ et $u(e_2)$).

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2°) $p=4$, $q=4$, dans cette question $\underline{e}=\underline{f}$

$$A = Mat_{\underline{e},\underline{f}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

a) Déterminer l'image d'un vecteur $x=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ par u.

b) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, $u(e_3)$ et $u(e_4)$).

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Correction

1°) a) Les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\underline{f}$ sont :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1+2x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix}$$

Donc $u(x) = (x_1, -x_1+2x_2, x_1+x_2)$

b) $u(e_1) = f_1 - f_2 + f_3$ et $u(e_2) = 2f_2 + f_3$

$$x \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x)=0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1+2x_2 \\ x_1+x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ -x_1+2x_2=0 \\ x_1+x_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \end{cases}$$

Donc $Ker(u) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$

D'après le théorème du rang

$$\dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(\mathbb{R}^2) \Leftrightarrow \dim(Im(u)) = 2$$

D'autre part :

$$Im(u) = Vect(u(e_1), u(e_2))$$

$u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont deux vecteurs non proportionnels donc il forme une famille libre de $Im(u)$, cette famille étant génératrice, c'est une base de $Im(u)$.

Remarque :

Ici le théorème du rang ne sert pas à grand-chose.

Dans ce cas $Im(u)$ est un plan de $\mathbb{R}^3$.

2°) a) Les coordonnées du vecteur $u(x)$ dans la base $\underline{e}$ sont :

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix}$$

$$u(x) = (x_1 + 2x_3 - x_4, -x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4)$$

b) $u(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4$, $u(e_2) = 2e_2 - e_3 + 3e_4$, $u(e_3) = 2e_1 + e_3 + 7e_4$ et $u(e_4) = -e_1 - e_2 - 5e_4$.

c)

$$x \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{R^4} \Leftrightarrow AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 \\ x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \\ L_3 + L_2 \\ L_4 - 2L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = -x_3 + x_4 \end{cases}$$

Un vecteur de $Ker(u)$ s'écrit $x = (-2x_3 + x_4, -x_3 + x_4, x_3, x_4) = x_3(-2,-1,1,0) + x_4(1,1,0,1)$ si on pose $a = (-2,-1,1,0)$ et $b = (1,1,0,1)$ alors

$$Ker(u) = Vect(a, b)$$

a et b ne sont pas propotionnels, ils forment une famille libre de $Ker(u)$, c'est une famille génératrice de $Ker(u)$, et donc une base de $Ker(u)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(\mathbb{R}^4) \Leftrightarrow 2 + \dim(Im(u)) = 4 \Leftrightarrow \dim\,(Im(u) = 2$$

D'autre part :

$u(e_1) = e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4$, $u(e_2) = 2e_2 - e_3 + 3e_4$ sont deux vecteurs non proportionnels de $Im(u)$, $(u(e_1), u(e_2))$ est une famille libre à deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2, c'est une base de $Im(u)$.

Remarque :

$Im(u) = Vect(u(e_1), u(e_2), u(e_3), u(e_4))$ ne sert à rien dans cette question.

Exercice 3 :

Soit $u: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$, une application linéaire, $\underline{e} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$ et $\underline{f} = (f_1, \dots, f_q)$ la base canonique de $\mathbb{R}^q$.

1°) $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3)$$

(On admet que u est une application linéaire).

a) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).

b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

2°) $p = 3$ et $q = 3$ dans cette question $\underline{e} = \underline{f}$. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$u(x) = (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2)$$

(On admet que u est une application linéaire).

a) Déterminer l'image de la base $\underline{e}$ (c'est-à-dire $u(e_1)$, $u(e_2)$, et $u(e_3)$).

b) Déterminer la matrice de u de la base $\underline{e}$ dans la base $\underline{e}$.

c) Déterminer le noyau et l'image de u.

Correction

1°) a)

$$e_1 = (1,0,0) \Rightarrow u(e_1) = (1,2,3) = e_1 + 2e_2 + 3e_3$$
$$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow u(e_2) = (1,0,1) = e_1 + e_3$$
$$e_3 = (0,0,1) \Rightarrow u(e_3) = (0,-1,-1) = -e_2 - e_3$$

b)

$$A = Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

c)

$$x \in \ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, 2x_1 - x_3, 3x_1 + x_2 - x_3) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = -2x_2 \end{cases}$$

$$x = (-x_2, x_2, -2x_2) = x_2(-1,1,-2)$$

$a = (-1,1,-2)$, $\ker(u) = Vect(a)$.

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(\mathbb{R}^3) \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 3 - 1 = 2$$

Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires (qui forment donc une famille libre) dans $Im(u)$, par exemple : $u(e_1)$ et $u(e_2)$ (on aurait pu prendre $u(e_1)$ et $u(e_3)$ ou $u(e_2)$ et $u(e_3)$).

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2)\big)$$

Il est totalement inutile de chercher une relation entre $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$ car le théorème du rang donne la dimension de l'image de u.

2°) a)

$$e_1 = (1,0,0) \Rightarrow u(e_1) = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$e_2 = (0,1,0) \Rightarrow u(e_2) = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$$
$$e_3 = (0,0,1) \Rightarrow u(e_3) = (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

b)

$$Mat_{\underline{e}}(u) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array}$$

c) $x = (x_1, x_2, x_3) \in Ker(u) \Leftrightarrow u(x) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (x_1 + x_2, x_1 + x_2, x_1 + x_2) = (0,0,0) \Leftrightarrow x_1 + x_2 = 0$

Un vecteur de $Ker(u)$ est de la forme $x = (x_1, -x_1, x_3) = x_1(1,-1,0) + (0,0,1)$

Si on pose $a = (1,-1,0)$ et $b = (0,0,1)$, $Ker(u) = Vect(a, b)$

a et b sont deux vecteurs non proportionnels de $Ker(u)$, cette famille engendre $Ker(u)$, il s'agit donc d'une base de $Ker(u)$. Pour l'image, pas besoin du théorème du rang, on pose $c = (1,1,1)$

$$Im(u) = Vect(c, c, 0_{\mathbb{R}^3}) = Vect(c)$$

$Im(u)$ est la droite engendrée par c.