Université Claude Bernard Lyon 1

Math II - Algèbre

CC1 : Polynômes et fractions rationnelles

Date 6 Avril 2010 - durée : 1 heure

Question 1 . Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur le corps commutatif $\mathbb{K}$. Démontrer l'énoncé suivant :

L'élément $a \in \mathbb{K}$ est racine au moins double du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$
si et seulement si
a est racine simultanément de P et du polynôme dérivé P'

Correction

Si $a \in \mathbb{K}$ est racine au moins double du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X-a)^2 Q \Rightarrow P(a) = 0$$

a est racine de P.

$$P' = 2(X-a)Q + (X-a)^2 Q \Rightarrow P'(a) = 0$$

Donc a est racine de P'.

Réciproque

Si a est racine de P et de P'.

a est racine de P donc il existe Q_1 tel que $P = (X-a)Q_1$, en dérivant ce polynôme on trouve :

$$P' = Q_1 + (X-a)Q_1'$$

Or $P'(a) = 0$ donc $0 = Q_1(a) + (a-a)Q_1'(a)$, par conséquent $Q_1(a) = 0$, il existe donc un polynôme Q tel que $Q_1 = (X-a)Q$, ce que l'on remplace dans $P = (X-a)Q_1$ donc $P = (X-a)^2 Q$.

Cela signifie que a est racine double de P.

Question 2. Soit $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a) Montrer que $1 + j = -j^2$

b) Montrer que est une racine multiple de P.

c) Trouver deux racines réelles évidentes de P.

d) Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction

a) $1 + j = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = -j^2$

Ou mieux

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

Car $j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$.

b)

$$P(j) = (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^6 j - 1 = -j^{14} - j - 1 - j^{12} j^2 - j - 1 = -(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$

$$P'(j) = 7((j+1)^6 - j^6) = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(j^{12} - 1) = 7(1-1) = 0$$

Donc j est au moins racine double.

c) $P(0) = (0+1)^7 - 0^7 - 1 = 1^7 - 1 = 0$ et $P(-1) = (-1+1)^7 - (-1)^7 - 1 = 0 - (-1) - 1 = 0$

Donc 0 et -1 sont deux racines évidentes.
d) Le début de la formule du binôme de $(X+1)^7$ est X^7+7X^6 (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc P est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.
D'autre part, j est racine double (au moins) donc $\overline{j}=j^2$ est aussi racine double (au moins) car P est un polynôme à coefficients réels. 0 et -1 sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme $d°P=6$ on a toutes les racines. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P=7X(X+1)(X-j)^2\left(X-\overline{j}\right)^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X-j)\left(X-\overline{j}\right)=(X-j)(X-j^2)=X^2-(j+j^2)X+j^3=X^2+X+1$$

Donc

$$P=7X(X+1)\left((X-j)\left(X-\overline{j}\right)\right)^2=7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Question 3. Soit n un entier strictement positif.
a) Déterminer le pgcd des polynômes X^n-1 et $(X-1)^n$ dans $\mathbb{R}[X]$.
b) Pour $n=3$, trouver un couple de polynômes (U,V) tel que :

$$(X^3-1)U+(X-1)^3V=X-1$$

b) $(X-1)^n$ n'a qu'une racine $X=1$, or 1 est racine simple de X^n-1 donc

$$PGCD\left((X^n-1),(X-1)^n\right)=X-1$$

c) D'après le théorème de Bézout il existe (U,V) tels que :

$$(X^3-1)U+(X-1)^3V=X-1$$

Cette équation équivaut à :

$$(X^2+X+1)U+(X^2-2X+1)=1$$

Car $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$ et $(X-1)^3=(X-1)(X^2-2X+1)$

$$\begin{array}{r|l} X^2-2X+1 & X^2+X+1 \\ \cline{2-2} X^2+X\ \ +1 & 1 \\ \cline{1-1} -3X & \end{array}$$

Donc

$$X^2-2X+1=1\times(X^2+X+1)+(-3X)$$

$$\begin{array}{l|c} X^2+X+1 & -3X \\ \cline{2-2} X^2 & -\frac{1}{3}X-\frac{1}{3} \\ \hline X+1 & \\ X & \\ \cline{1-1} 1 & \end{array}$$

Donc

$$X^2+X+1=(-3X)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)+1$$

On en tire que :

$$\begin{aligned}1&=(X^2+X+1)-(-3X)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\\&=X^2+X+1-\left((X^2-2X+1)-1\times(X^2+X+1)\right)\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\\&=-\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)(X^2-2X+1)+\left(1+\left(-\frac{1}{3}X-\frac{1}{3}\right)\right)(X^2+X+1)\\&=\left(\frac{1}{3}X+\frac{1}{3}\right)(X^2-2X+1)+\left(-\frac{1}{3}X+\frac{2}{3}\right)(X^2+X+1)\end{aligned}$$

Donc
$U = -\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$ et $V = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$
Autre méthode
Comme $(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

$$\begin{array}{l|l}
X^3 - 3X^2 + 3X - 1 & X^3 - 1 \\ \cline{2-2}
X^3 \qquad\qquad\qquad - 1 & 1 \\ \hline
\quad -3X^2 + 3X &
\end{array}$$

$$(X-1)^3 = 1 \times (X^3 - 1) + (-3X^2 + 3X)$$

$$\begin{array}{l|l}
X^3 \qquad\qquad - 1 & -3X^2 + 3X \\ \cline{2-2}
X^3 - X^2 & -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \\ \hline
\qquad X^2 \qquad - 1 & \\
\qquad X^2 - X & \\ \hline
\qquad\qquad X - 1 &
\end{array}$$

$$X^3 - 1 = \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)(-3X^2 + 3X) + X - 1$$

Il est inutile de faire une troisième division car

$$-3X^2 + 3X = -3X(X-1) + 0$$

$$X - 1 = X^3 - 1 - \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)(-3X^2 + 3X) = X^3 - 1 - \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)\left((X-1)^3 - (X^3 - 1)\right)$$
$$= (X^3 - 1)\left(1 + \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)\right) - \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}\right)(X-1)^3$$
$$= (X^3 - 1)\left(-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}\right)(X-1)^3$$

On retrouve le même résultat.

Question 4. On considère la fraction rationnelle suivante de $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^2 - 4}{(X^2 + 2X + 5)(X-1)^2}$$

a) Déterminer, sans calculer les coefficients, la forme de la décomposition en éléments simple de $\frac{P}{Q}$ sur $\mathbb{R}$. Justifier votre réponse.

---

b) (Question bonus) Calculer les coefficients dans la décomposition de $\frac{P}{Q}$ trouvée au point a).

Correction
a) Le polynôme $X^2 + 2X + 5$ n'a pas de racine réelle car $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 = -16 < 0$. Et 1 est une racine double.

$$\frac{P}{Q} = \frac{aX + b}{X^2 + 2X + 5} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2}$$

b) Je multiplie par $(X-1)^2$, puis $X = 1$.

$$d = \left[\frac{X^2 - 4}{X^2 + 2X + 5}\right]_{X=1} = \frac{-3}{8}$$

Je multiplie par X, puis $X \to +\infty$.

$$0 = a + c \Leftrightarrow a = -c$$

$X = 0$.

$$-\frac{4}{5}=\frac{b}{5}-c+d \Leftrightarrow -4=b-5c+5\times\left(-\frac{3}{8}\right) \Leftrightarrow b=5c-\frac{17}{8}$$

$X=-1.$

$$\frac{-3}{16}=\frac{-a+b}{4}-\frac{c}{2}+\frac{d}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}=-a+b-2c+d \Leftrightarrow -\frac{3}{4}=c+5c-\frac{17}{8}-2c-\frac{3}{8} \Leftrightarrow 4c=-\frac{3}{4}+\frac{17}{8}+\frac{3}{8}$$
$$\Leftrightarrow 4c=\frac{7}{4} \Leftrightarrow c=\frac{7}{16}$$

Donc

$$a=\frac{-7}{16}$$
$$b=5\times\frac{7}{16}-\frac{17}{8}=\frac{1}{16}$$
$$\frac{X^2-4}{(X^2+2X+5)(X-1)^2}=\frac{\frac{-7}{16}X+\frac{1}{16}}{X^2+2X+5}+\frac{\frac{7}{16}}{X-1}-\frac{\frac{3}{8}}{(X-1)^2}$$

Autre méthode pour calculer a et b

Les racines complexes de X^2+2X+5 sont :

$$X_1=\frac{-2-4i}{2}=-1-2i$$

Et

$$X_2=-1+2i$$

On multiplie par X^2+2X+5, puis $X=-1+2i$

$$a(-1+2i)+b=\left[\frac{X^2-4}{(X-1)^2}\right]_{X=-1+2i}=\frac{(-1+2i)^2-4}{(-1+2i-1)^2}=\frac{1-4i-4-4}{(-2+2i)^2}=\frac{-7-4i}{4(-1+i)^2}=\frac{-7-4i}{4(-2i)}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{7}{8}i$$

Donc

$$-a+b+2ai=\frac{1}{2}-\frac{7}{8}i \Leftrightarrow \begin{cases}-a+b=\frac{1}{2}\\ 2a=-\frac{7}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{7}{16}+b=\frac{1}{2}\\ a=-\frac{7}{16}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\frac{1}{2}-\frac{7}{16}=\frac{1}{16}\\ a=-\frac{7}{16}\end{cases}$$

Ensuite pour trouver d on fait pareil que précédemment, puis pour calculer c, soit on fait $X=0$ ou on multiplie par X et on fait tendre X vers l'infini.