

CC1 : Polynômes et fractions rationnelles.

Date : 6 avril 2010 - Durée : 1 heure

Question 1. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur le corps commutatif \mathbb{K} . Démontrer l'énoncé suivant :

*L'élément $a \in \mathbb{K}$ est une racine au moins double de $P \in \mathbb{K}[X]$
si et seulement si
 a est simultanément racine de P et du polynôme dérivé P' .*

Question 2. Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. On note $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

- Montrer que $1 + j = -j^2$.
- Montrer que j est une racine multiple de P .
- Trouver deux racines réelles évidentes de P .
- Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Question 3. Soit n un entier strictement positif.

- Déterminer le pgcd des polynômes $X^n - 1$ et $(X - 1)^n$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- Pour $n = 3$, trouver un couple de polynômes réels (U, V) tel que

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = (X - 1).$$

Question 4. On considère la fraction rationnelle suivante de $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^2 - 4}{(X^2 + 2X + 5)(X - 1)^2}.$$

- Déterminer, sans calculer les coefficients, la forme de la décomposition en éléments simples de $\frac{P}{Q}$ sur \mathbb{R} . Justifier votre réponse.
-

- (Question bonus) Calculer les coefficients dans la décomposition de $\frac{P}{Q}$ trouvée au point a).