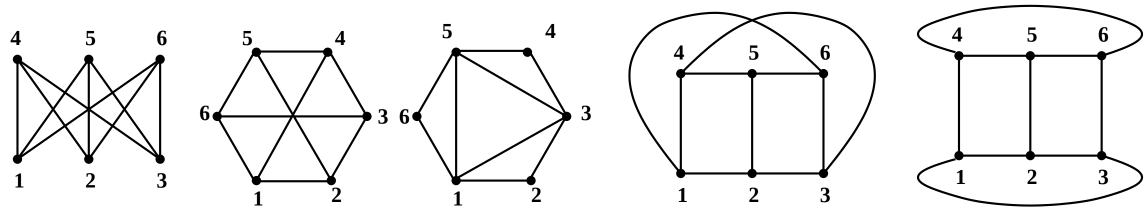
Feuille n. 1 : Graphes

1. Trouver les graphes isomorphes et les graphes identiques parmi les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 définis par
$V(G_1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_1) = \{e, f, g, h\}$,
$\psi_{G_1}(e) = \{1, 2\}, \psi_{G_1}(f) = \{2, 3\}, \psi_{G_1}(g) = \{3, 4\}, \psi_{G_1}(h) = \{4, 1\}$,
$V(G_2) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_2) = \{e, f, g, h\}$,
$\psi_{G_2}(e) = \{1, 2\}, \psi_{G_2}(f) = \{2, 3\}, \psi_{G_2}(g) = \{3, 1\}, \psi_{G_2}(h) = \{4, 1\}$,
G_3 est le graphe complet K_3 et G_4 est le graphe complet K_4.

2. Trouver les graphes isomorphes et les graphes identiques parmi les graphes suivants.



3. Représenter par un diagramme le graphe G avec matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les matrices d'adjacence et d'incidence du premier et deuxième graphe de l'exercice 2.

5. Montrer les inégalités suivantes :

$$\min_{v \in V} d(v) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \max_{v \in V} d(v).$$

6. Montrer que dans un graphe simple avec au moins deux sommets il y a deux sommets de même degré.

7. Le complement G^c de G est le graphe avec sommets $V(G)$ dont deux sont liés par une arête si et seulement s'ils ne sont pas liés par une aréte dans G.
Trouver une déscription simple de $K^c_{m,n}$.

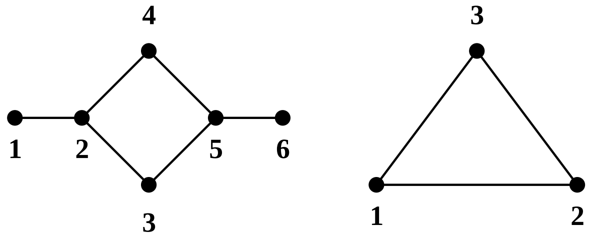
8. Un graphe est *auto-complementaire*, si $G \cong G^c$.

(a) Montrer que dans un graphe auto-complementaire on a $|V| \equiv 0, 1 \mod 4$.
(b) Trouver deux graphes tels que $G^c \cong G$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $V = \{0, 1\}^n$, c.à.d. V soit l'ensemble des 0-1–suites de longueur n. Deux sommets forment une arête ssi les suites diffèrent dans exactement une coordonnée. Ce graphe s'appelle cube de dimension n. Déterminer

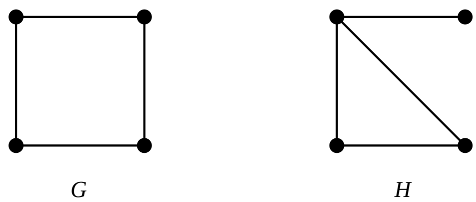
(a) le nombre des arêtes
(b) les degrés des sommets
(c) la distance maximale des deux sommets dans ce graphe.

10. Un isomorphisme de G dans G est un *automorphisme* de G.
(a) Montrer que : Les automorphismes d'un graphe G forment un groupe avec l'opération de composition de fonctions.
(b) Trouver les groupes d'automorphismes des graphes suivants.



(c) Trouver les groupes d'automorphismes de K_n.
(d) Montrer que G et G^c ont les mêmes automorphismes.

11. Soit S l'ensemble des graphes admettant $V = \{1, 2, 3, 4\}$ comme ensemble des sommets.
(a) Calculer le cardinal de S.
(b) Dessiner le 11 graphes qui représentent les classes d'équivalences des graphes à 4 sommets.
(c) Donner les ensembles des graphes dans S (étiquetés) qui sont représentés respectivement par G et H :



(d) Calculer $|Aut(G)|$ et $|Aut(H)|$.

12. Soit G un graphe biparti avec bipartition $V = X \cup Y$ de sommets.
En plus, le graphe G soit régulier de degré $d > 0$, c.à.d. chaque sommet a le même degré $d > 0$.
Montrer que : Les ensembles X et Y ont la même cardinalité.

13. Quels graphes des exercices **1** et **2** sont bipartis ?

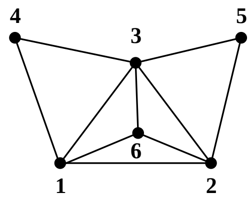
14. Trouver une caractérisation des matrices d'incidence et adjacence des graphes bipartis.

15. Montrer que si G est simple, alors

$$|E(G)| \leq \binom{|V(G)|}{2}.$$

Feuille n. 2 : Graphes

16. On considère le graphe G ci-dessous. Dessiner :



(a) les graphes $G - \{3\}$, $G - \{6\}$ et $G - \{1, 2\}$;

(b) un graphe partiel de G avec 5 arêtes ; un clique et un stable de G.

17. Les séquences de degrés suivantes sont-elles réalisables ?

(a) (2,3,3,4,5,6,7)

(b) (1,3,3,4,5,6,6)

(c) (1,1,2,2,2,3,3,4,6)

Dans le cas positif, exhiber un graphe qui les réalise.

18. Soit G un graphe connexe avec au moins deux sommets. Montrer qu'il existe au moins un sommet v tel que le sous-graphe $G-v$ obtenu en supprimant v et les arêtes incidentes à v est connexe.

19. Soit G un graphe simple à n sommets, p arêtes et k composantes connexes. Montrer que

$$n - k \leq p \leq \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}.$$

20. Montrer que un graphe ou son complémentaire sont connexes.
Est-il possible que tous les deux soient connexes ?

21. (a) Trouver les matrices d'adjacence des graphes d'exercice **2**.

(b) Trouver les nombres des chaînes de longueur 3 de sommet 1 à sommet 2 dans chaque graphe.

(c) Trouver les nombres de toutes les chaînes fermeés de longueur 3 dans chaque graphe.

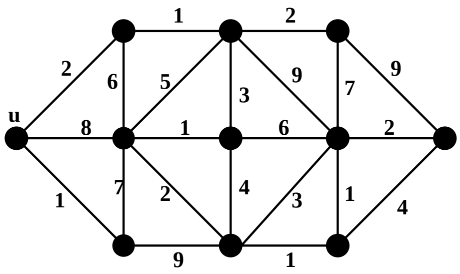
22. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Montrer que si $|E| \geq |V|$ alors G contient un cycle ; par suite si G ne contient pas de cycle alors $|E| \leq |V| - 1$.

23. Montrer que s'il existe une chaîne de u à v dans G, il existe aussi une chaîne élémentaire de u à v dans G.

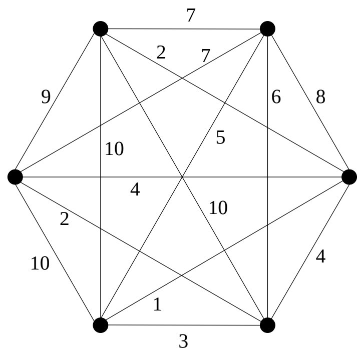
24. Montrer qu'une arête e qui appartient à une chaîne fermée simple, appartient toujours à un cycle.

Feuille n. 3 : Arbres

25. Trouver dans le graphe suivant les chemins de longueur minimale de u à tous les autres sommets.



26. Choisir un sommet u et trouver dans le graphe suivant les chemins de longueur minimale de u à tous les autres sommets. Répéter pour un autre sommet v et comparer le résultat.



27. Soit T un arbre. Montrer qu'entre deux sommets différents $x, y \in V(T)$ il existe une unique chaîne élémentaire.

28. Soit G un graphe sans boucle. Montrer que si entre toute paire de sommets $x, y \in V(G)$ il existe une unique chaîne élémentaire, alors G est un arbre.

29. Tout arbre non trivial ($\nu \geq 2$) a au moins deux sommets pendants.
Prouver ce résultat en montrant que l'origine et la fin d'une plus longue chaîne élémentaire dans un arbre non trivial ont degré un.

30. Montrer que les propriétés suivantes d'un graphe G avec $\nu \neq 0$ sont équivalentes :

(a) G est un arbre

(b) G est un graphe maximal sans cycle (c.à.d. on obtient un cycle si on ajoute une arête arbitraire).

(c) G est un graphe minimal connexe.

(d) G est un graphe sans cycle et $\nu = \varepsilon + 1$.

(e) G est un graphe connexe et $\nu = \varepsilon + 1$.

31. Montrer que si G est simple et connexe, mais non complet, alors G a trois sommets u, v, et w tels que $uv, vw \in E(G)$, et $uw \notin E(G)$.

Feuille n. 4 : Arbres recouvrants

32. Montrer que tout arbre est biparti.

33. Tout graphe G connexe d'ordre n possède au moins $n-1$ arêtes.

34. Soit G un graphe possédant un sommet $v \in V$ de degré 1. Alors
(a) G est connexe si et seulement si $G - v$ est connexe ;
(b) G est sans cycle si et seulement si $G - v$ est sans cycle.

35. Montrer que
(a) si tout sommet de G est pair, alors G n'a pas d'arête séparatrice ;
(b) si G est un graphe k-regulier biparti avec $k \geq 2$, alors G n'a pas d'arête séparatrice.

36. Soit F une forêt recouvrante maximale de G. Montrer que
(a) pour toute composante connexe H de G, $F \cap H$ est un arbre recouvrant de H ;
(b) $\varepsilon(F) = \nu(G) - \omega(G)$.

37. Soit G sans boucle et non trivial ($\nu \geq 2$). Montrer que $v \in V(G)$ est un sommet séparateur de G si et seulement si $\omega(G - v) > \omega(G)$.

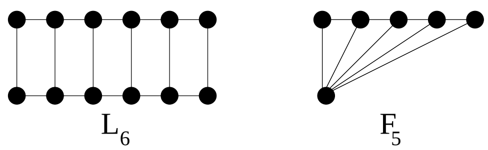
38. Soit G connexe, avec $\nu \geq 3$. Montrer que
(a) si G a une arête séparatrice, alors G a un sommet $v \in V(G)$ tel que $\omega(G - v) > \omega(G)$;
(b) la réciproque de (**38**a) n'est pas vraie.

39. Calculer $\tau(C_n)$, où C_n est le cycle de longueur n.

40. Soit T un arbre. Utiliser la formule de récurrence pour montrer que $\tau(T) = 1$.

41. Utiliser la formule de récurrence pour τ pour calculer $\tau(K_{3,3})$ et $\tau(K_4)$.

42. Trouver le nombre des arbres recouvrants de l'échelle L_6 à 12 sommets et de l'éventail F_5 à 6-sommets :



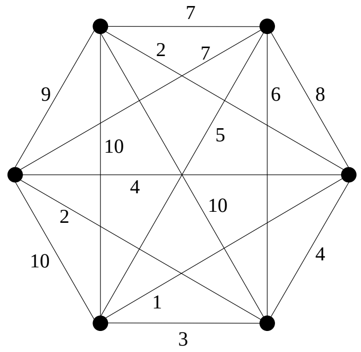
43. Combien d'arbres recouvrants contient le graphe K_6 ? Combien d'entre eux sont des arbres non-isomorphes ?

44. Écrire une liste de tous les arbres étiquetés à 4 sommets et les listes d'entiers correspondantes par la bijection de Prüfer.

45. Comment est-ce qu'on peut recuperer les degrés des sommets d'un arbre du code de Prüfer ?

Feuille n. 5 : Tours eulériens et cycles hamiltoniens

46. Trouver un arbre couvrant optimal dans le graphe suivant (c.à.d. un arbre couvrant avec somme minimale de poids). Qu'est-ce que change si on minimise le *produit* des poids au lieu de la somme ?



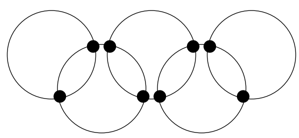
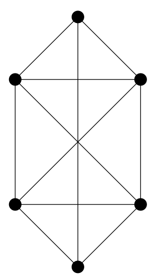
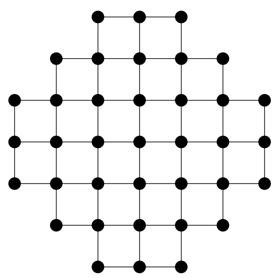
47. L'algorithme de Kruskal est une variation d'algorithme de Jarník-Prim où on choisit à chaque étape l'arête minimale, qui est connectée aux arêtes dejà trouvées et ne forme pas une cycle avec elles.

Montrer que l'algorithme de Kruskal donne toujours un arbre couvrant optimal.

48. Appliquer l'algorithme de Kruskal au graphe d'exercice **46**.

49. Montrer que : Un graphe contient une chaîne qui utilise chaque arête exactement une fois, ssi le graphe et connexe et contient au plus deux sommets de degré impair.

50. Trouver un cycle Eulerien ou une chaîne Eulerienne dans les graphes suivants ou montrer qu'ils n'existent pas.

51. Lesquels de graphes suivants admettent un cycle Eulerien ou une chaîne Eulerienne ?

(a) K_n

(b) $K_{m,n}$.

(c) Les solides de Platon vus comme graphes des sommets.

(d) Le cube de dimension n.

52. Un graphe orienté est *faiblement connexe*, si le graphe non-orienté correspondant est connexe.

Un graphe orienté est *fortement connexe*, si, pour chaque $x, y \in V$, il existe une chaîne orientée de x à y.

Le *degré entrant* $d_{in}(x)$ est le nombre d'arêtes qui terminent à x et le *degré sortant* $d_{out}(x)$ est le nombre d'arêtes qui sortent de x.

Soit G un graphe orienté tel que $d_{in}(x) = d_{out}(x)$ pour tout $x \in V$.

Montrer que G est faiblement connexe si et seulement si G est fortement connexe.

53. Soit G un graphe orienté faiblement connexe tel que $d_{in}(x) = d_{out}(x)$ pour tout $x \in V$. Montrer que G admet un cycle eulerien orienté (c.à.d. une chaîne orientée qui passe exactement une fois par chaque arête).

54. Trouver une suite cyclique de sept 0 et sept 1 telle qu'on trouve tous les blocs de longueur 4 sauf 0000 et 1111 parmi les blocs de quatre chiffres consecutifs.

(Exemple : La suite cyclique 101 contient 10,01 et 11 comme blocs de deux chiffres consecutifs.)

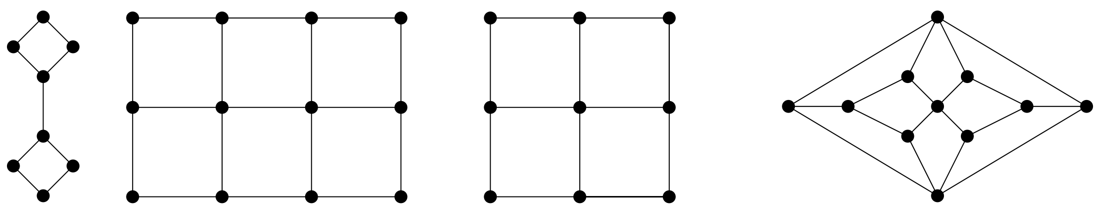
55. Soit A un alphabet de lettres $\{a, b, c\}$. Montrer qu'il existe une suite cyclique qui contient chaque lettre 27 fois et qui contient tous les mots de 4 lettres comme blocs de lettres consecutifs.

56. Montrer que : Si on enlève un sommet arbitraire de graphe de Petersen on obtient un graphe avec un cycle hamiltonien.

57. Trouver des cycles de longueur maximale et minimale dans le graphe de Petersen et dans le graphe de dodécaèdre.

58. Lesquels de graphes d'exercice **51** admettent un cycle hamiltonien ?

59. Les graphes suivants, contiennent-ils un cycle hamiltonien ?



60. Soit G un graphe simple tel que $d(x) + d(y) \geq |V| \geq 3$ pour tout x, y non-adjacent.

(a) Montrer que G est connexe.

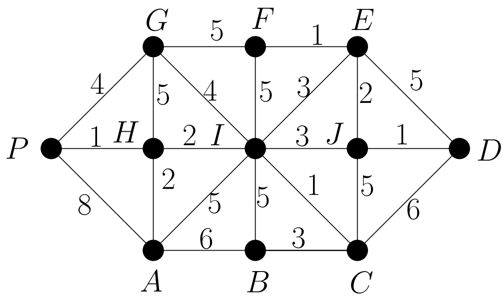
(b) Montrer que G contient un cycle hamiltonien.

61. Soit G un graphe biparti qui admet un cycle eulerien. Montrer que le nombre d'arêtes est pair.

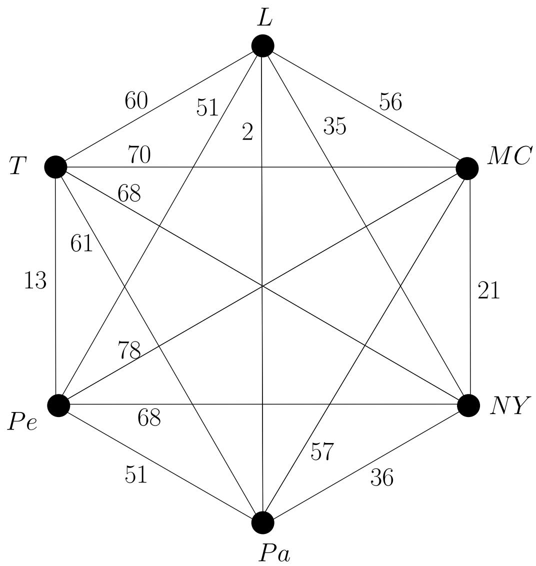
62. Soit G un graphe biparti avec bipartition $V = X \cup Y$ qui admet un cycle hamiltonien. Montrer que $|X| = |Y|$.

63. On suppose que toutes les arêtes d'exercice **51** ont poids 1.
Trouver des routes optimales qui passent par toutes les arêtes.

64. Résoudre le problème de facteur chinois pour le graphe suivant :



65. Trouver une solution approximative du problème de voyageur de commerce pour le graphe suivant.
Utiliser l'algorithme de Prim-Jarník pour trouver une borne inférieure et comparer.



Feuille n. 6 : Expressions rationnelles

66. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres (non-vides) dont les sommets sont étiquetés avec $1, 2, \ldots, \nu(T)$. Pour $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$, soit $T_1 \circ T_2$ le nouveau arbre qu'on obtient si on identifie le sommet $\nu(T_1)$ dans T_1 avec le sommet 1 de T_2 et on remplace les étiquettes i de T_2 par $i + \nu(T_1) - 1$.

Montrer que $\mathcal{T}$ forme un monoïde avec l'opération $\circ$.

Montrer que $\circ$ n'est pas commutitatif et $\mathcal{T}$ ne forme pas un groupe avec $\circ$.

67. Soit A l'alphabet $\{a, b\}$.

Donner une liste $A^* = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots$ tel que M_{i+1} est un sous-monoïde (strict) de M_i.

68. Soit A_2 l'alphabet $\{a, b\}$ et A_3 l'alphabet $\{a, b, c\}$. On note P l'ensemble des mots sur A_2 formé par ε et les mots commençant par a et sans facteur bbb. Vérifier que P est un sous-monoïde de A_2^*.

Soit φ l'homomorphisme de A_3^* dans A_2^* défini par $\varphi(a) = abb$, $\varphi(b) = ab$, $\varphi(c) = a$. Montrer que c'est un isomorphisme de A_2^* sur P.

Remarque : Un isomorphisme de monoïdes est un homomorphisme bijectif dont l'inverse est un homomorphisme. Cependant tout homomorphisme de monoïdes qui est bijectif est un isomorphisme.

69. Soit A un alphabet contenant au moins les lettres a et b.

(a) Donner un homomorphisme μ de A^* dans $(A \cdot A)^*$.

(b) Donner un homomorphisme de A^* dans $(A \setminus \{b\})^*$.

(c) Y-a-t-il un isomorphisme de monoïdes entre $(A \setminus \{a\})^*$ et $(A \setminus \{b\})^*$?

70. Soit A l'alphabet $\{0, 1\}$. Lesquelles de fonctions suivantes entre A^* et A^* sont bien définies et homomorphismes de monoïdes ?

(a) La fonction qui remplace chaque bloc maximal de 1 consecutifs par 1.

(b) La fonction qui remplace chaque bloc 001 par 1.

(c) La fonction qui remplace chaque bloc 010 par 1.

(d) La fonction qui remplace chaque 0 par 1 et chaque 1 par 0.

(e) La fonction qui échange les deux prémières lettres.

71. Soit A l'alphabet $\{0, 1\}$ et L le langage $(A^* \cdot 1)$. Lesquelles de fonctions suivantes entre L et L sont bien définies et homomorphismes de monoïdes ?

(a) La fonction qui remplace chaque bloc maximal de 1 consecutifs par 1.

(b) La fonction qui remplace chaque bloc 001 par 1.

(c) La fonction qui remplace chaque bloc 010 par 1.

72. Soit $A = \{a, b, c\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots qui commencent et terminent avec la même lettre.

73. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots dont la longueur est divisible par 3.

74. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots avec période 3 dont la longueur est divisible par 3.

75. Soit $A = \{a, b\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots contenants un nombre pair de a.

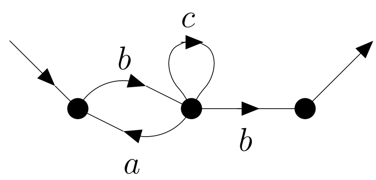
76. Soit $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle pour tous les mots qui contiennent exactement trois lettres a.

77. Soit $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle pour tous les mots qui contiennent au moins un a et au moins un b et dont la prémière occurrence de a est avant la prémière de b.

78. Soit $A = \{0, 1\}$ un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots qui correspondent aux représentations binaires des entiers divisibles par 3.

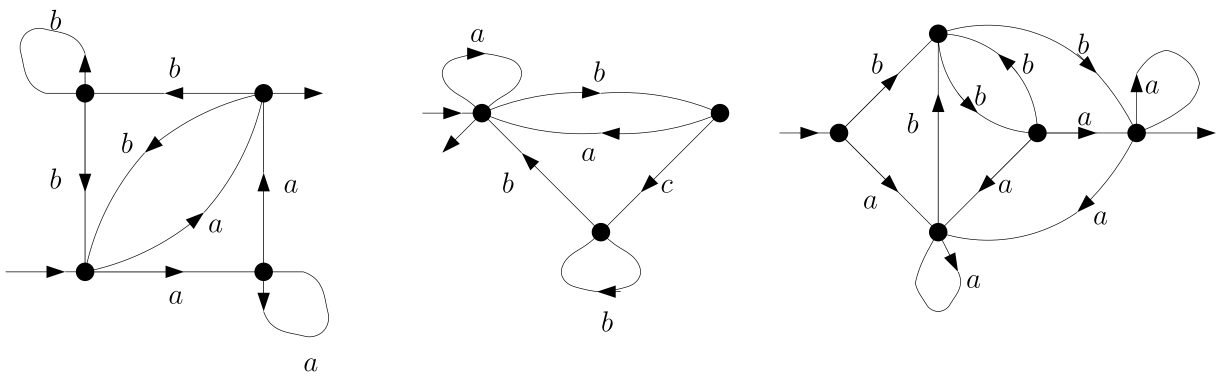
79. Donner une description en français des langanges donnés par les expressions rationnelles suivantes : AA, $(\varepsilon + A)(\varepsilon + A)$, $(AA)^*$, A^*aA^*, A^*abA^*, $A^*aA^*bA^*$, et $(ab)^*$.

80. Donner une expression rationnelle pour le langage defini par l'automate suivant :



81. Pour les exos **72–78** trouver un automate qui donne le même langage.

82. Trouver des expressions rationnelles correspondantes aux automates suivants :



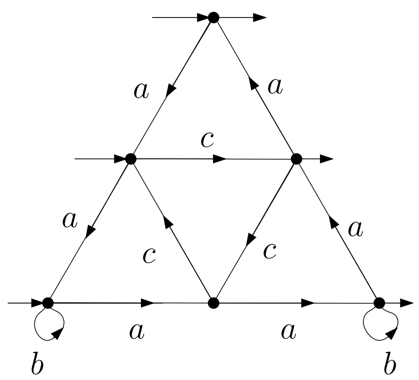
Feuille n. 7 : Automates

83. Soit (A, Q, δ, I, F) l'automate fini avec $A = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $I = q_0$, $F = \{q_0, q_3\}$ et δ est la liste des transitions $(q_0, 0, q_1)$, $(q_0, 1, q_0)$, $(q_1, 0, q_2)$, (q_1, ε, q_2), $(q_2, 0, q_3)$, $(q_3, 1, q_3)$, $(q_3, 1, q_0)$.
Dessinez cet automate et tentez de décrire en français le langage reconnu par cet automate.
Construisez l'automate obtenu par déterminisation de l'automate précédent.

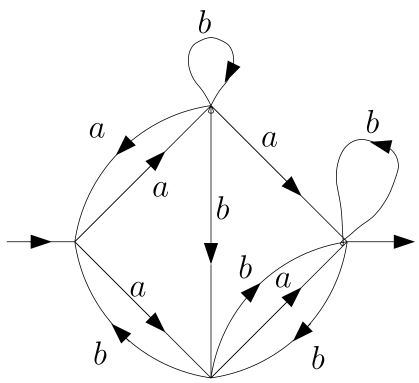
84. (Mot de Fibonacci) Soit μ l'homomorphisme de mots tel que $\mu(a) = ab$ et $\mu(b) = a$. On définit la suite de mots $w_1 = a$ et $w_{n+1} = \mu(w_n)$.
Montrer que w_n est un segment initial de w_{n+1}.
Calculer $\#_a(w_n)$ (resp $\#_b(w_n)$), le nombre de lettres a (resp b) dans le mot w_n.

85. (Mot de Thue-Morse) Soit μ l'homomorphisme de mots tel que $\mu(0) = 01$ et $\mu(1) = 10$. On définit la suite de mots $w_1 = 0$ et $w_{n+1} = \mu(w_n)$.
Montrer que w_n est un segment initial de w_{n+1}.
Calculer $\#_0(w_n)$ (resp $\#_1(w_n)$), le nombre de lettres 0 (resp 1) dans le mot w_n.

86. Trouver la normalisation de l'automate suivant :



87. Trouver la déterminisation de l'automate suivant :

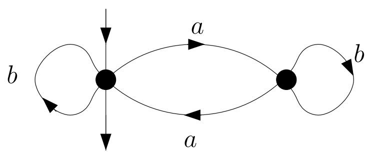


88. Soient L et K deux langages réguliers qui utilisent de lettres de l'alphabet A (on peut toujours trouver un tel A).
Dites si les langages suivants vous paraissent réguliers. Si oui, donnez une idée afin de construire des automates pour ces langages à partir de l'automate de L :

(a) Un sous-langage L' arbitraire de L.
(b) La concatenation KL.
(c) La réunion $K + L$.
(d) L'étoile L^*.
(e) Le complémentaire $A^* \setminus L$.
(f) L'intersection $K \cap L$.
(g) La différence $K \setminus L$.
(h) L'ensemble $Pref(L)$ des préfixes de L.
(i) L'ensemble $Suff(L)$ des suffixes de L.
(j) le langage $Reflet(L)$ des mots de L écrits à l'envers.
(k) le langage $Shuffle(L, K)$ des mots qui sont des entrelacements d'un mot de L et un mot de K. (Par exemple : Si $abcd \in L$ et $xyz \in K$, les mots $axybcdz$ et $xabyczd$ sont dans $Shuffle(L, K)$.)

89. Soient L et K deux langages avec $\varepsilon \in K$ et soit l'équation $X = KX + L$ où l'inconnue X désigne un langage.
Montrer que les solutions sont exactement de la forme $X = K^*(L + Y)$ où $Y \subseteq A^*$.

90. Utiliser le lemme d'Arden pour trouver une expression rationnelle pour le graphe suivant et les graphes d'exercice **82**.



91. (Lemmes d'etoile)
Soit L un langage rationnel sur un alphabet A.
Montrer les trois propriétés suivantes :

(a) Il existe un entier n tel que pour tout mot w de L tel que $|w| \geq n$, il existe trois mots u_1, u_2, u_3 de A^* tels que $w = u_1u_2u_3$, $u_2 \neq \varepsilon$ et $u_1u_2^*u_3 \subseteq L$.
(b) Il existe un entier n tel que pour tout mot w de L qui s'écrit sous la forme $w = w_1w_2w_3$ avec $|w_2| \geq n$, il existe trois mots u_1, u_2, u_3 de A^* tels que $w_2 = u_1u_2u_3$, $u_2 \neq \varepsilon$ et $w_1u_1u_2^*u_3w_3 \subseteq L$.
(c) Il existe un entier n tel que pour tout mot w de L, pour toute suite d'entiers

$$0 \leq i_0 < i_1 < \cdots < i_n \leq |w|$$

il existe deux entiers $0 \leq j < k \leq n$ tels que si on écrit $w = u_1u_2u_3$ avec $|u_1| = i_j$ et $|u_1u_2| = i_k$ alors $u_1u_2^*u_3 \subseteq L$.

92. En utilisant les lemmes d'étoile, montrer que ces langages ne sont pas rationnels :
– $L_1 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ est un palindrome}\}$
– $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
– $L_3 = \{a^{n^2} \mid n \geq 0\}$

– $L_4 = \{a^n b^p \mid n \neq p\}$
– $L_5 = \{ab^{k_1}ab^{k_2}\dots ab^{k_p}a \mid p \geq 0 \text{ et } \exists i > 0 : k_i \neq i\}$ (Langage de Goldstine)
– $L_6 = \{a^p \mid p \text{ premier}\}$

Soit L un langage rationnel, les langages suivants sont-ils toujours rationnels ?

(a) $\{uu \in \{a,b\}^* \mid u \in L\}$
(b) $\{u \in \{a,b\}^* \mid uu \in L\}$
(c) $\{u \in \{a,b\}^* \mid \exists v \text{ tel que } |u| = |v| \text{ et } uv \in L\}$
(d) $\{u \in \{a,b\}^* \mid aubuubabu \in L\}$ (on pourra utiliser la représentation par monoïde)

93. Nous allons montrer que les lemmes d'étoile d'exercice **91** ne sont pas équivalents.

(a) Montrer que le langage L_2 vérifie la propriété (a) mais pas la propriété (b).
(b) Montrer que, si $A = \{a,b,c,d\}$, le langage

$$L_7 = \{(ab)^n(cd)^n \mid n \geq 0\} \cup A^*(aa + bb + cc + dd + ac)A^*$$

vérifie la propriété (b) mais pas la propriété (c).

94. On dit qu'un mot contient un carré s'il peut s'écrire sous la forme $uvvu'$ avec $v \neq \varepsilon$. Soit $L = \{udv \in \{a,b,c,d\}^* \mid u,v \in \{a,b,c\}^* \text{ et soit } u \neq v, \text{ soit } u \text{ ou } v \text{ contient un carré}\}$.

(a) Montrer que L vérifie une lemme d'étoile pour $n = 4$.
(b) Montrer que L n'est pas rationnel. On pourra admettre l'existence de mots sans carré arbitrairement longs (sur un alphabet à au moins 3 éléments) et appliquer un lemme d'étoile au complémentaire de L.

Automate minimal
Définitions et notations utilisées :

– Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur Σ^* est dite *compatible à droite* ssi

$$\forall(u,v,w) \in (\Sigma^*)^3, (u\mathcal{R}v \Rightarrow uw\mathcal{R}vw)$$

– Soit L un langage sur l'alphabet Σ et u un mot de Σ^*. On appelle *résiduel (à gauche) de L pour le mot u* l'ensembe $u^{-1}L := \{v \in \Sigma^* : uv \in L\}$.
– Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, e_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe complet avec δ une application de $Q \times \Sigma$ dans Q.
On note δ^* l'extension de δ aux mots. ($\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$.)
Pour chaque état $q \in Q$, on note :

$$L_q = \{v \in \Sigma^* : \delta^*(q,v) \in F\} \text{ et } L'_q = \{v \in \Sigma^* : \delta^*(e_0,v) = q\}.$$

L_q est le langage reconnu par l'automate lorsque q est l'état initial.
L'_q est le langage reconnu par l'automate lorsque $F = \{q\}$.
Enfin on note $Q_0 = \{\delta^*(e_0,u), u \in \Sigma^*\}$ l'ensemble des états accesibles.

95. **Quelques propriétés préliminaires utiles.**
Vérifier que

(a) $\varepsilon^{-1}L = L$
(b) $\forall u \in \Sigma^* : u \in L \Leftrightarrow \varepsilon \in u^{-1}L$

(c) $\forall (u,v) \in (\Sigma^*)^2, (uv)^{-1}L = v^{-1}(u^{-1}L)$.

(d) $\varepsilon \in L_q \Leftrightarrow q \in F$

(e) Si $L = L(\mathcal{A})$, alors $\forall p \in Q \forall c \in \Sigma : L_{\delta(p,c)} = c^{-1}L_p$.

Automate équivalent avec un minimum d'états

96. Soit L un langage rationnel sur Σ et $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, e_0, F, \delta)$ un automate fini déterministe complet reconnaissant L.
Établir que $\forall u \in \Sigma^* : u^{-1}L = L_q$ avec $q = \delta^*(e_0, u)$.
En déduire que l'ensemble $R_L = \{u^{-1}L : u \in \Sigma^*\}$ des résiduels de L est fini et que $|R_L| \leq |Q_0| \leq |Q|$.

97. Réciprocement, on se donne un langage L tel que l'ensemble R_L des résiduels est fini et on se propose de démontrer que L est un langage réconnaissable.
On considère sur Σ^* la relation $\mathcal{R}_L$ définie par $u\mathcal{R}_L v \Leftrightarrow u^{-1}L = v^{-1}L$.

(a) Vérifier que $\mathcal{R}_L$ est une relation d'équivalence compatible à droite.
On note $[u]_L$ la classe d'équivalence de u modulo $\mathcal{R}_L$.
Ainsi $v \in [u]_L \Leftrightarrow u^{-1}L = v^{-1}L$.

(b) On note Q_L l'ensemble quotient $\Sigma^*/\mathcal{R}_L$. Autrement dit : $Q_L = \{[u]_L : u \in \Sigma^*\}$.
Montrer qu'on définit une application δ_L de $Q_L \times \Sigma$ vers Q_L en posant $\delta_L([u]_L, c) = [uc]_L$.

(c) On note $\mathcal{A}_L$ l'automate fini déterministe complet (appelé automate quotient modulo L) défini par $\mathcal{A}_L = (\Sigma, Q_L, e_L, F_L, \delta_L)$ avec $e_L = [\varepsilon]_L$ et $F_L = \{[u]_L : u \in L\}$.
Après avoir établi que $\forall u \in \Sigma^*, \forall v \in \Sigma^* : \delta_L^*([u]_L, v) = [uv]_L$, prouver que le langage reconnu par $\mathcal{A}_L$ est égal à L. Conclure.

(d) Montrer que pour tout automate fini déterministe complet $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, e_0, F, \delta)$ qui reconnait L, on a
$$|Q_L| \leq |Q_0| \leq |Q|.$$

Quelques exemples d'application

98. On considère $L = \{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}$ sur $\Sigma = \{a, b\}$.
Montrer que R_L n'est pas fini et en déduire que L n'est pas rationnel.

99. On considère le langage L sur $\{a, b\}$ donné par $a(ba)^*$.
Déterminer les ensembles R_L et Q_L et donner le graphe de $\mathcal{A}_L$.