

40. Soit  $\mathcal{T}$  l'ensemble des arbres (non-vides) dont les sommets sont étiquetés avec  $1, 2, \dots, \nu(T)$ .

Pour  $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ , soit  $T_1 \circ T_2$  le nouveau arbre qu'on obtient si on identifie le sommet  $\nu(T_1)$  dans  $T_1$  avec le sommet 1 de  $T_2$  et on remplace les étiquettes  $i$  de  $T_2$  par  $i + \nu(T_1) - 1$ .

Montrer que  $\mathcal{T}$  forme un monoïde avec l'opération  $\circ$ .

Montrer que  $\circ$  n'est pas commutatif et  $\mathcal{T}$  ne forme pas un groupe avec  $\circ$ .

41. Soit  $A$  l'alphabet  $\{a, b\}$ .

Donner une liste  $A^* = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \dots$  tel que  $M_{i+1}$  est un sous-monoïde (strict) de  $M_i$ .

42. Soit  $A_2$  l'alphabet  $\{a, b\}$  et  $A_3$  l'alphabet  $\{a, b, c\}$ . On note  $P$  l'ensemble des mots sur  $A_2$  formé par  $\varepsilon$  et les mots commençant par  $a$  et sans facteur  $bbb$ . Vérifier que  $P$  est un sous-monoïde de  $A_2^*$ .

Soit  $\varphi$  l'homomorphisme de  $A_3^*$  dans  $A_2^*$  défini par  $\varphi(a) = abb$ ,  $\varphi(b) = ab$ ,  $\varphi(c) = a$ . Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $A_2^*$  sur  $P$ .

Remarque : Un isomorphisme de monoïdes est un homomorphisme bijectif dont l'inverse est un homomorphisme. Cependant tout homomorphisme de monoïdes qui est bijectif est un isomorphisme.

43. Soit  $A$  un alphabet contenant au moins les lettres  $a$  et  $b$ .

- Donner un homomorphisme  $\mu$  de  $A^*$  dans  $(A \cdot A)^*$ . Donner le noyau  $\mu^{-1}(\varepsilon)$ .
- Donner un homomorphisme de  $A^*$  dans  $(A \setminus \{b\})^*$ . Donner le noyau  $\mu^{-1}(\varepsilon)$ .
- Y-a-t-il un isomorphisme de monoïdes entre  $(A \setminus \{a\})^*$  et  $(A \setminus \{b\})^*$ ?

44. Soit  $A$  l'alphabet  $\{0, 1\}$ . Lesquelles de fonctions suivantes entre  $A^*$  et  $A^*$  sont bien définies et homomorphismes de monoïdes?

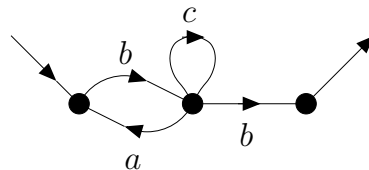
- La fonction qui remplace chaque bloc maximal de 1 consécutifs par 1.
- La fonction qui remplace chaque bloc 001 par 1.
- La fonction qui remplace chaque bloc 010 par 1.
- La fonction qui remplace chaque 0 par 1 et chaque 1 par 0.
- La fonction qui échange les deux premières lettres.

45. Soit  $A$  l'alphabet  $\{0, 1\}$  et  $L$  le langage  $(A^* \cdot 1)$ . Lesquelles de fonctions suivantes entre  $L$  et  $L$  sont bien définies et homomorphismes de monoïdes?

- La fonction qui remplace chaque bloc maximal de 1 consécutifs par 1.

- (b) La fonction qui remplace chaque bloc 001 par 1.
- (c) La fonction qui remplace chaque bloc 010 par 1.

46. Soit  $A = \{a, b, c\}$  un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots qui commencent et terminent avec la même lettre.
47. Soit  $A = \{a, b\}$  un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots dont la longueur est divisible par 3.
48. Soit  $A = \{a, b\}$  un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots avec période 3 dont la longueur est divisible par 3.
49. Soit  $A = \{a, b\}$  un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots contenant un nombre pair de  $a$ .
50. Soit  $A = \{a, b, c, \dots, y, z\}$  un alphabet. Donner une expression rationnelle pour tous les mots qui contiennent exactement trois lettres  $a$ .
51. Soit  $A = \{a, b, c, \dots, y, z\}$  un alphabet. Donner une expression rationnelle pour tous les mots qui contiennent au moins un  $a$  et au moins un  $b$  et dont la première occurrence de  $a$  est avant la première de  $b$ .
52. Soit  $A = \{0, 1\}$  un alphabet. Donner une expression rationnelle qui donne tous les mots qui correspondent aux représentations binaires des entiers divisibles par 3.
53. Donner une description en français des langages donnés par les expressions rationnelles suivantes :  $AA$ ,  $(\varepsilon + A)(\varepsilon + A)$ ,  $(AA)^*$ ,  $A^*aA^*$ ,  $A^*abA^*$ ,  $A^*aA^*bA^*$ , et  $(ab)^*$ .
54. Donner une expression rationnelle pour le langage défini par l'automate suivant :



55. Pour les exos 46–52 trouver un automate qui donne le même langage.