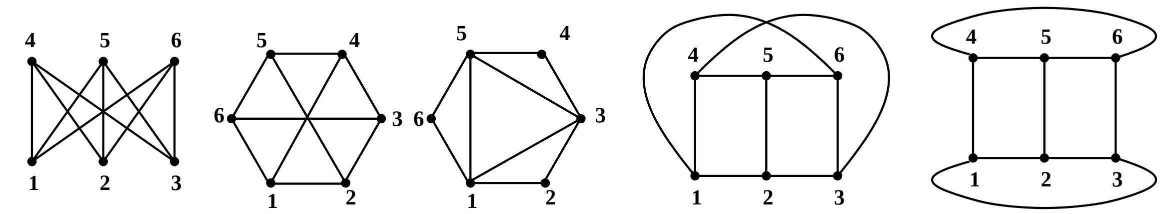
Feuille n. 1 : Graphes

1. Trouver les graphes isomorphes et les graphes identiques parmi les graphes G_1, G_2, G_3 et G_4 définis par
$V(G_1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_1) = \{e, f, g, h\}$,
$\psi_{G_1}(e) = \{1, 2\}, \psi_{G_1}(f) = \{2, 3\}, \psi_{G_1}(g) = \{3, 4\}, \psi_{G_1}(h) = \{4, 1\}$,
$V(G_2) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_2) = \{e, f, g, h\}$,
$\psi_{G_2}(e) = \{1, 2\}, \psi_{G_2}(f) = \{2, 3\}, \psi_{G_2}(g) = \{3, 1\}, \psi_{G_2}(h) = \{4, 1\}$,
G_3 est le graphe complet K_3 et G_4 est le graphe complet K_4.

2. Trouver les graphes isomorphes et les graphes identiques parmi les graphes suivants.



3. Représenter par un diagramme le graphe G avec matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer les matrices d'adjacence et d'incidence du premier et deuxième graphe de l'exercice 2.

5. Montrer les inégalités suivantes :

$$\min_{v \in V} d(v) \leq \frac{2|E|}{|V|} \leq \max_{v \in V} d(v).$$

6. Montrer que dans un graphe simple avec au moins deux sommets il y a deux sommets de même degré.

7. Le complement G^c de G est le graphe avec sommets $V(G)$ dont deux sont liés par une arête si et seulement s'ils ne sont pas liés par une aréte dans G.
Trouver une déscription simple de $K_{m,n}^c$.

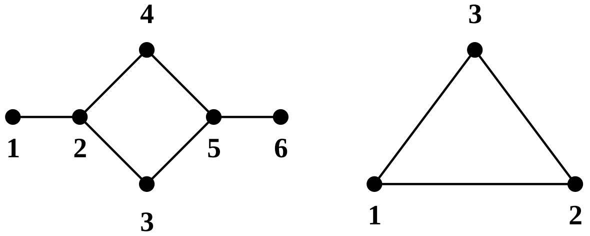
8. Un graphe est *auto-complementaire*, si $G \cong G^c$.

(a) Montrer que dans un graphe auto-complementaire on a $|V| \equiv 0, 1 \mod 4$.
(b) Trouver deux graphes tels que $G^c \cong G$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $V = \{0, 1\}^n$, c.à.d. V soit l'ensemble des 0-1–suites de longueur n. Deux sommets forment une arête ssi les suites diffèrent dans exactement une coordonnée. Ce graphe s'appelle cube de dimension n. Déterminer

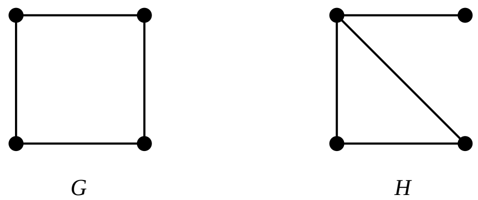
(a) le nombre des arêtes
(b) les degrés des sommets
(c) la distance maximale des deux sommets dans ce graphe.

10. Un isomorphisme de G dans G est un *automorphisme* de G.
(a) Montrer que : Les automorphismes d'un graphe G forment un groupe avec l'opération de composition de fonctions.
(b) Trouver les groupes d'automorphismes des graphes suivants.



(c) Trouver les groupes d'automorphismes de K_n.
(d) Montrer que G et G^c ont les mêmes automorphismes.

11. Soit S l'ensemble des graphes admettant $V = \{1, 2, 3, 4\}$ comme ensemble des sommets.
(a) Calculer le cardinal de S.
(b) Dessiner le 11 graphes qui représentent les classes d'équivalences des graphes à 4 sommets.
(c) Donner les ensembles des graphes dans S (étiquetés) qui sont représentés respectivement par G et H :



(d) Calculer $|Aut(G)|$ et $|Aut(H)|$.

12. Soit G un graphe biparti avec bipartition $V = X \cup Y$ de sommets.
En plus, le graphe G soit régulier de degré $d > 0$, c.à.d. chaque sommet a le même degré $d > 0$.
Montrer que : Les ensembles X et Y ont la même cardinalité.

13. Quels graphes des exercices 1 et 2 sont bipartis ?

14. Trouver une caractérisation des matrices d'incidence et adjacence des graphes bipartis.

15. Montrer que si G est simple, alors

$$|E(G)| \leq \binom{|V(G)|}{2}.$$