Université Claude Bernard Lyon 1

L2 - Graphes, Automates, Langages

CC3 du 14 décembre 2010 - 1h

Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Motiver chaque réponse. La qualité de la rédaction est prise en compte.

7

Question 1.

0,5 1. Donner la définition d'un tour eulérien.

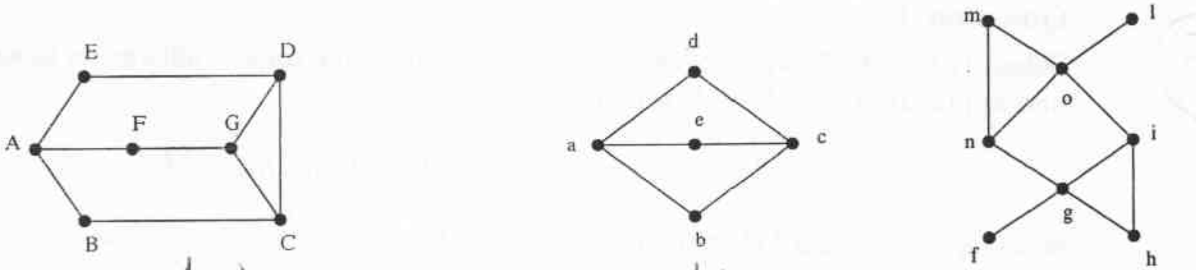
0,5 2. Donner la définition d'un cycle hamiltonien.

Dire lesquels de graphes suivants contiennent un tour eulérien et/ou un cycle hamiltonien. Dans le cas affirmatif, donner un tel tour ou cycle, dans le cas négatif donner une justification.

1,5 3. Le cube de dimension 3.

1,5 4. Un arbre avec 6 sommets.

3 5. Les trois graphes ci-dessous. Indication : pour le premier graphe (celui sur la gauche) analyser le sommet A et ses trois voisins.

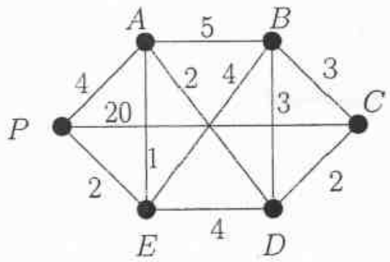


1 ham 1 ham 1 ham

Question 2.

3

Dans le graphe ci-dessous, trouver avec justification une route de longueur minimale qui commence et termine à la poste P et utilise chaque arète au moins une fois. Donner une route minimale explicite et sa la longueur totale.



1. d(P,C)

1. arêtes à doubler
et longueur

1. route minimale

7,5

Question 3.

1. Donner une description en français des langages donnés par les expressions rationnelles suivantes :

0,5 × 5

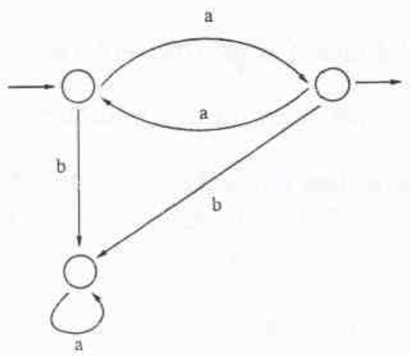
$$AA,\ (AA)^*,\ (\varepsilon + A)(\varepsilon + A),\ a^* + b^*,\ (ab)^* + (ba)^* + b(ab)^* + a(ba)^*.$$

1,5

2. Normaliser l'automate $\mathcal{A}$ en figure.

1,5

3. Donner une expression rationnelle pour le langage $L(\mathcal{A})$ des mots acceptés.



2

4. Construire un automate qui reconnait le langage $(aab)^*b$.

3,5

Question 4.

Soient $(M, \cdot)$ et $(N, *)$ deux monoïdes. On rappelle que un morphisme de monoïdes est une application $\varphi : M \to N$ telle que

$$\varphi(m_1 \cdot m_2) = \varphi(m_1) * \varphi(m_2) \quad \forall\ m_1, m_2 \in M$$

et $\varphi(\varepsilon_M) = \varepsilon_N$, ($\varepsilon_M$ l'élélement neutre de M).

1

1. Montrer que si φ est injectif alors $\varphi(m) = \varepsilon_N$ si et seulement si $m = \varepsilon_M$.
2. Soient A l'alphabet $\{a, b\}$ et $\varphi : A^* \to A^*$ le morphisme défini par

$$\varphi(a) = ab \quad \text{et} \quad \varphi(b) = a.$$

1

3. φ est-il injectif ?

1

4. φ est-il surjectif ?

0,5

5. Calculer $\varphi^{-1}(abaababa)$.

Question 1

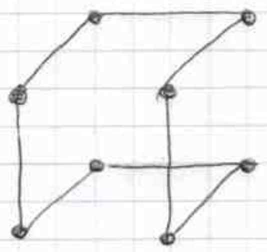
Corrigé CC3 du 14/12/2010

1. Un Tour eulérien est une chaîne simple fermée qui passe par toutes les arêtes

2. Un cycle hamiltonien est une chaîne fermée qui passe par tous les sommets du graphe une et une seule fois.

3. Tous les 5 graphes ont des sommets de degré impair. Donc ils ne sont pas eulériens.

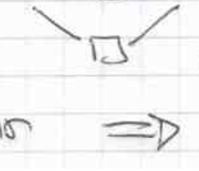
Le cube est hamiltonien. Voici un cycle hamiltonien



4. Un arbre ne contient pas de cycle. Donc un arbre avec 6 sommets n'est pas hamiltonien.

5 Le graphe sur la gauche a un sommet A qui a trois voisins de degré 2 (E,F,B). Un cycle qui passe par tous les sommets doit forcément contenir A au moins 3 fois $\Rightarrow$ le graphe n'est pas hamiltonien.

Le graphe au centre est biparti avec un nombre impair de



sommet.

$\Rightarrow$ il ne contient pas de cycle impair $\Rightarrow$

il n'est pas hamiltonien.

Le graphe sur la droite a plusieurs sommets séparateurs : par exemple

$$\omega(G - \{o\}) = 2 > |\{o\}| = 1$$

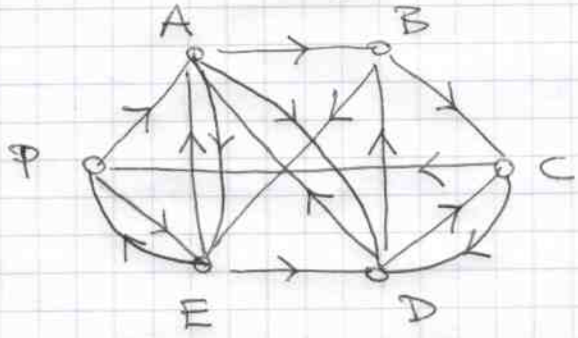
$\Rightarrow$ le graphe n'est pas hamiltonien. ■

Question 2

Dans le graphe en figure, il y a deux sommets P et C de degré impair.

La distance entre P et C est $= 7 = d(P, C)$ et la chaîne minimale qui les relie est P-E-A-D-C.

Si on re-double les arêtes PE, EA, AD, DC on obtient un graphe eulérien.



Une route explicite dont la longueur est 50+7 = 57 est donnée par la suite suivante :

P-~~E~~-A-D-C-D-A-E-P-A-B-E-D-B-C-P

■

Question 3

1\.

AA : mots de longueur 2

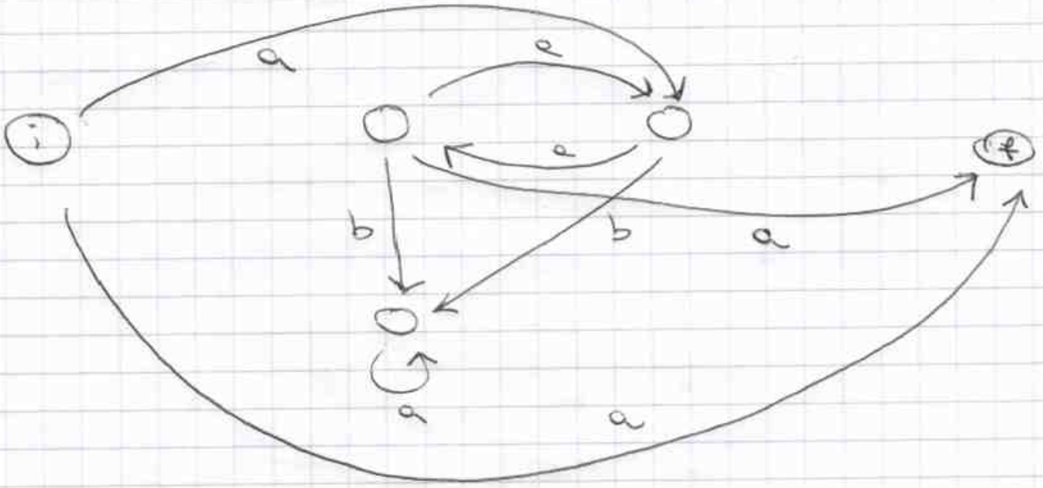
$(AA)^*$: mots de longueur pair

$(\varepsilon + A)(\varepsilon + A)$: mots de longueur 0, 1, 2.

$a^* + b^*$: le mot vide, les mots formés seulement de a ou de b.

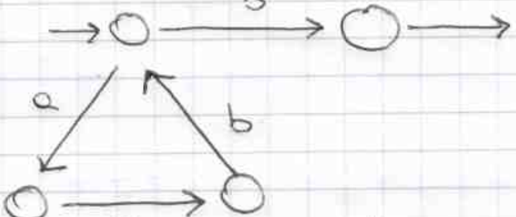
$(ab)^* + (ba)^* + b(ab)^* + a(ba)^*$: mots n'ayant pas deux a ou deux b consecutives dans l'alphabet $A = \{a, b\}$.

2\. L'automate normalisé est le suivant :



3\. $L(A) = a(aa)^*$

4\.



A'

$L(A') = (aab)^* b$

Question 4

1. ($\Leftarrow$) si $m = \varepsilon_M$ alors par définition

$\varphi(\varepsilon_M) = \varepsilon_N$.

($\Rightarrow$) si m est tel que $\varphi(m) = \varepsilon_N$

comme φ est injective et $\varphi(\varepsilon_M) = \varepsilon_N$

on a $\varphi(m) = \varphi(\varepsilon_M) \Rightarrow m = \varepsilon_M$.

2) comme $\varphi(a) = ab$ et $\varphi(b) = a$, l'unique mot tel que $\varphi(m) = \varepsilon_N$ est le mot vide ε_M $\Rightarrow$ par le point 1) $\Rightarrow$ φ est injective.

3) Non, φ n'est pas surjective car

$\varphi^{-1}(b)$ n'existe pas.

4) $\varphi^{-1}(abaababa) = abaab$

$\blacksquare$