Université Claude Bernard Lyon 1

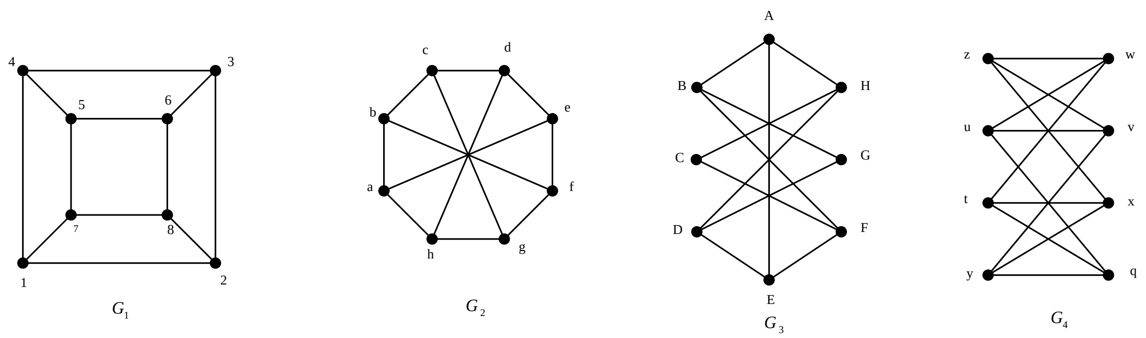
L2 - Graphes, Automates, Langages

Corrigé du CC1 du 13 octobre 2010 - 1h15

Question 1. Pour chaque couple de graphes (G_i, G_j) parmi G_1, G_2, G_3, G_4 :

1. si $G_i \simeq G_j$, donner un isomorphisme explicite;
2. sinon, justifier pourquoi G_i et G_j ne sont pas isomorphes.

(4pts)



Proof.

1. G_1 et G_4 sont isomorphes. Comme les graphes sont simples, un isomorphisme est donné par la bijection suivante $\theta : V(G_1) \to V(G_4)$:

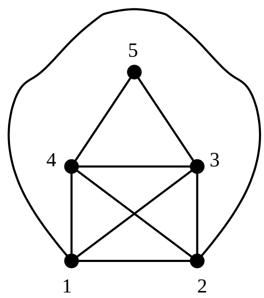
$$\theta(1) = y,\ \theta(2) = q,\ \theta(3) = u,\ \theta(4) = v,\ \theta(5) = z,\ \theta(6) = w,\ \theta(7) = x,\ \theta(8) = t.$$

2. G_3 est le seul graphe ayant deux sommets de degré 2. Donc il n'est pas isomorphe à aucun des autres graphes qui sont 3-reguliers.

3. G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes car G_1 est biparti et G_2 non. En effet il possède des cycles impairs. Du point 2., pour la propriété transitive, il suit que $G_2 \not\simeq G_4$.

□

Question 2. On considère le graphe G suivant :



1. Donner un example de chaîne élémentaire de longueur 4. (1pts)

2. Donner la matrice d'adjacence $A(G)$ de ce graphe. (1pts)

3. Combien y a-t-il de chaînes de longueur 3 du sommet 2 au sommet 3 dans G ? Et du sommet 2 au sommet 2 ? (2pts)

Proof.

1. Une chaîne élémentaire est donnée par 14532.

2. La matrice d'adjacence est donnée par

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Pour calculer le nombre de chaînes de longueur 3 du sommet 2 au sommet 3, il faut calculer le coefficient en position $(2,3)$ de la matrice $A(G)^3$, qui est égal à 13. Le coefficient en position $(2,2)$ dans $A(G)^3$, est égal à 10.

□

Question 3. Pour un graphe $G = (V, E)$ on pose $\nu = |V|$ et $\varepsilon = |E|$.

1. Donner les définitions d'un graphe : simple; connexe; complet. (1.5pts)

2. Donner une interprétation combinatoire du nombre $\binom{\nu}{2}$. (1pts)

3. Montrer que si G est simple et $\varepsilon > \binom{\nu-1}{2}$, alors G est connexe. (3pts)

4. Pour, $\nu > 1$, trouver un graphe simple non connexe G avec $\varepsilon = \binom{\nu-1}{2}$. (1pts)

Proof.

1. Un graphe simple est un graphe sans boucles ni arêtes multiples.
   Un graphe connexe est un graphe tel pour toute paire de sommets u et v, il existe une chaîne qui relie u à v.
   Un graphe complet est un graphe où tous les sommets sont adjacents.

2. $\binom{\nu}{2}$ compte le nombre maximum d'arêtes dans un graphe simple avec ν sommets, c'est -à-dire le nombre d'arêtes du graphe complet K_ν.

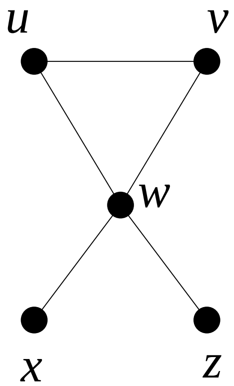
3. Supposons que G n'est pas complet, alors il existe au moins deux composantes connexes. Il est facile de se convaincre que on peut se ramener à la situation suivante où G a deux composantes connexes, une G_1 formée par un seul sommet et l'autre G_2 par les restants $n-1$. Entre les $(n-1)$ sommets de G_2 il y a au plus $\binom{\nu-1}{2}$ arêtes. Comme le nombre d'arêtes du graphes G est strictement supérieur à $\binom{\nu-1}{2}$, il y a forcement une arête qui relie le sommet isolé de G_1 avec un sommet de la composante G_2. Le graphe G est alors connexe.

4. Un premier exemple pour $\nu = 3$ et $\varepsilon = 1$ est donné par un graphe simple non-connexe avec un sommet isolé u, et les autres deux sommets v et w reliés par la seule arête du graphe vw.

□

Question 4.

1. Montrer que dans le graphe suivant chaque automorphisme (θ, ϕ) a un sommet fixé $\theta(s) = s$, $(\theta : V \to V, \phi : E \to E)$. Justifier. (2pts)



2. Est-ce que chaque automorphisme de ce graphe a aussi une arête fixée, $\phi(e) = e$? Justifier. (1.5 pts)

3. Calculer le nombre $|Aut(G)|$ d'automorphismes de ce graphe, et donner les éléments du groupe $Aut(G)$. (2pts)

Proof.

1. Si θ est un automorphisme de G alors, $d(v) = d(\theta(v))$, pour tout sommet v de G. En d'autres mots, le degré des sommets est préservé par l'automorphisme. Comme w est le seul sommet de degré 4, on a que $\theta(w) = w$, pour tout $\theta \in Aut(G)$.

2. Pour la même raison $\theta(u), \theta(v) \in \{u, v\}$. Dans les deux situations possibles $\theta(u) = u$ et $\theta(v) = v$, ou $\theta(u) = v$ et $\theta(v) = u$ l'arête uv est fixée, i.e. $\phi(uv) = uv$.

3. Pour le même argument $\theta(x), \theta(z) \in \{x, z\}$. On en déduit que il y a 4 automorphismes, qui sont $Aut(G) = \{id, \theta_{u,v}, \theta_{x,z}, \theta_{x,z} \circ \theta_{u,v}\}$, où $\theta_{u,v}$ est l'automorphisme qui exchange u et v, i.e., $\theta_{u,v}(u) = v$ et $\theta_{u,v}(v) = u$, (même pour $\theta_{x,z}$).

   On aurait pu utiliser la formule $5! = |Aut(G)| \times \ell(G)$. Calculons $\ell(G)$: on a 5 possibilités pour choisir l'étiquette de w, et $\binom{4}{2}$ pour choisir les étiquettes du couple (u, v), ce qui donne $5 \times 6 = 30$ façons différentes d'étiqueter le graphe G. On en déduit que $|Aut(G)| = 120/30 = 4$.

□