

Partiel : durée 1h30
14 mars 2018

Tous les documents sont interdits, l'usage des calculatrices et des téléphones portables sont interdits.

Exercice 1.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de \mathbb{R}^4

Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ où

$$u_1 = (1, -1, 1, 1) \quad \text{et} \quad u_2 = (1, 1, -1, 1)$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .
2. Donner une base de E et une base de F .
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Correction exercice 1

1. Première solution

Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} x \in E &\Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-x_2 - x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2(-e_1 + e_2) + x_3(-e_1 + e_3) + x_4(-e_1 + e_4) \\ x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $E = \text{Vect}(-e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_1 + e_4)$ et par conséquent E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

Deuxième solution

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^4} \in E$$

Soient $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ et $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in E, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$.

0. Soient λ et μ deux réels

$$\begin{aligned} \lambda x + \mu y &= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2, \lambda x_3 + \mu y_3, \lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2) + (\lambda x_3 + \mu y_3) + (\lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= \lambda(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \mu(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\lambda x + \mu y \in E$, ce qui montre que E est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

2. $(-e_1 + e_2, -e_1 + e_3, -e_1 + e_4)$ est une famille génératrice de E , pour tout α, β, γ réels

$$\alpha(-e_1 + e_2) + \beta(-e_1 + e_3) + \gamma(-e_1 + e_4) = 0_{\mathbb{R}^4} \Rightarrow (-\alpha - \beta - \gamma, \alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc cette famille est libre, il s'agit donc d'une base de E .

(u_0, u_1) est une famille libre car u_0 et u_1 ne sont pas proportionnels, et cette famille engendre F , il s'agit d'une base de F .

3. $\dim(E) = 3$ et $\dim(F) = 2$ donc $\dim(E) + \dim(F) = 5 \neq 4$ donc on n'a pas $E \oplus F = \mathbb{R}^4$.

Exercice 2.

Soient $P_0, P_1, P_2,$ et P_3 quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ définis par $P_0(X) = 1, P_1(X) = X - 1, P_2(X) = (X - 1)^2$ et $P_3(X) = (X - 1)^3$

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$. on admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que (P_2, P_3) est une base de E .
3. On pose $F = Vect(P_0, P_1)$, en donner une base.
4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}_3[X]$?

Correction exercice2

1. $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$, une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4 est une base.
2. $P_2(1) = 0, P_2' = 2(X-1)$ donc $P_2'(1) = 0$ et $d^\circ P_2 \leq 3$ donc $P_2 \in E$
 $P_3(1) = 0, P_3' = 3(X-1)^2$ donc $P_3'(1) = 0$ et $d^\circ P_3 \leq 3$ donc $P_3 \in E$
 P_2 et P_3 sont deux vecteurs non proportionnels de E . C'est une famille libre de E .

D'autre part

$$P \in E \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{R}, P = (X-1)^2(aX+b) = aX(X-1)^2 + b(X-1)^2$$

$(X(X-1)^2, (X-1)^2)$ est une famille génératrice de E , ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels, ils forment une famille libre de E donc $\dim(E) = 2$

(P_2, P_3) est une famille libre à deux vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base de E .

3. (P_0, P_1) est libre en tant que sous-famille d'une famille libre, elle engendre F , c'est une base de F .
4. (P_0, P_1) est une base de F et (P_2, P_3) est une base de E donc $E \oplus F = \mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3.

1. Sans faire de calculs, calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0 de la fonction f définie par :

$$f(x) = (\sin(x) + x)^{15}x^3 + 1 + 2x^3$$

2. Calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0 de la fonction g définie par :

$$g(x) = e^x \cos(2x)$$

3.

- a. Calculer le développement limité à l'ordre 4 de $x \ln(1+x)$ en 0.
- b. En déduire le développement limité à l'ordre 2 de h au voisinage de 0.

$$h(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x \ln(1+x)}$$

Correction exercice3

1. $(\sin(x) + x)^{15} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $(\sin(x) + x)^{15} = o(1)$ alors

$$f(x) = o(1)x^3 + 1 + 2x^3 = 1 + 2x^3 + o(x^3)$$

2.

$$\begin{aligned} g(x) &= e^x \cos(2x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) (1 - 2x^2 + o(x^3)) \\ &= 1 + x + \left(\frac{1}{2} - 2\right)x^2 + \left(\frac{1}{6} - 2\right)x^3 + o(x^3) = 1 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{11}{6}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

3.

- a. $x \ln(1+x) = x \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) = x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

b.

$$h(x) = \frac{1 - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4)} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)}$$

$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + o(x^2)$	$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)$
$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$	$\frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{12}$
$\frac{x}{4} - \frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$	
$\frac{x}{4} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$	

$-\frac{x^2}{12} + o(x^2)$	
$-\frac{x^2}{12} + o(x^2)$	
$o(x^2)$	

Donc $h(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{12} + o(x^2)$

Exercice 4.

Calculer, sans préjuger qu'elle existe la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Correction exercice4

$$(1+X)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2)$$

On pose $X = -x^2$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)$$

$$\frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)\right)}{x^4} = \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6} + o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{6}$$

Exercice 5.

On pose $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.

Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout $k > 0$, $J^k = 2^{k-1}J$
2. Calculer A^n en fonction de n , pour cela, comme $A = I + J$, on pourra appliquer la formule du binôme de Newton.
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n .

Correction exercice5

1. Par récurrence, $J^1 = 2^{1-1}J$ est vrai.

Il faut montrer que l'égalité au rang n entraîne celle au rang $n + 1$.

$$J^{n+1} = J^n J = 2^{n-1} J J = 2^{n-1} J^2$$

Et

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2J$$

$$J^{n+1} = 2^{n-1} 2J = 2^n J$$

Ce qui achève la récurrence.

2. $IJ = JI$ donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton.

$$\begin{aligned} A^n &= (I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k I^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k = \binom{n}{0} J^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} J^k = I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{k-1} J \\ &= I + \frac{1}{2} J \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = I + \frac{1}{2} J \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - 1 \right) = I + \frac{1}{2} J ((2+1)^n - 1) \\ &= I + \frac{1}{2} J (3^n - 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (3^n - 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n + 1) & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) & \frac{1}{2}(3^n + 1) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_{n+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

Par une récurrence quasi immédiate on a :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n + 1) & \frac{1}{2}(3^n - 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) & \frac{1}{2}(3^n + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(3^n + 1) \\ \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{pmatrix}$$

Par conséquent pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2}(3^n + 1) \\ v_n = \frac{1}{2}(3^n - 1) \end{cases}$$

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

Résoudre le système $AX = O$.

Correction exercice6

$$AX = O \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ L_2 & x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ L_3 & x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} L_1 & x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ L_2 - L_1 & -x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ L_3 - L_1 & -4x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2(x_3 - 2x_4) - x_3 - 3x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -3x_3 + x_4 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x_3 + x_4 \\ x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas proportionnels ils forment une famille libre de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, comme cette

famille engendre l'espace vectoriel des vecteurs colonnes vérifiant $AX = O$, c'est une base de cet espace vectoriel.