Université Claude Bernard Lyon 1 Semestre de printemps 2018
Fondamentaux des mathématiques 2

Partiel : durée 1h30
14 mars 2018

Tous les documents sont interdits, l'usage des calculatrices et des téléphones portables sont interdits.

Exercice 1.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$
Soit $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ et $F = Vect(u_1, u_2)$ où

$$u_1 = (1,-1,1,1) \quad \text{et} \quad u_2 = (1,1,-1,1)$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E et une base de F.
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Exercice 2.
Soient $P_0, P_1, P_2,$ et P_3 quatre polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ définis par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X - 1$, $P_2(X) = (X-1)^2$ et $P_3(X) = (X-1)^3$
Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0 \text{ et } P'(1) = 0\}$. on admettra que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_4[X]$ et que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_3[X]$.
1. Montrer que $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que (P_2, P_3) est une base de E.
3. On pose $F = Vect(P_0, P_1)$, en donner une base.
4. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}_3[X]$?

Exercice 3.
1. Sans faire de calcul, calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0 de la fonction f définie par :
$$f(x) = (\sin(x) + x)^{15}x^3 + 1 + 2x^3$$
2. Calculer le développement limité à l'ordre 3, en 0 de la fonction g définie par :
$$g(x) = e^x \cos(2x)$$
3.
   a. Calculer le développement limité à l'ordre 4 de $x\ln(1+x)$ en 0.
   b. En déduire le développement limité à l'ordre 2, de h au voisinage de 0, où h est définie par :
$$h(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x\ln(1+x)}$$

Exercice 4.
Calculer, sans préjuger qu'elle existe la limite suivante :
$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1 - x^2}}{x^4}$$

Exercice 5.
On pose $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$, puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = u_n + 2v_n$.
Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
1. Montrer que pour tout $k > 0$, $J^k = 2^{k-1}J$
2. Calculer A^n en fonction de n, pour cela, comme $A = I + J$, on pourra appliquer la formule du binôme de Newton.
3. En déduire u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 6.

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Résoudre le système $AX = O$.