Contrôle du 15 mars
Fondamentaux des mathématiques 2
Durée 1h30
Les téléphones et les calculatrices sont interdits
Barème : (sur 44,5 points)
Exercice 1. (3 points)
Exercice 2. (9 points) 2+2+2+3
Exercice 3. (10 points) 2+4+4
Exercice 4. (7 points) 4+3
Exercice 5. (15,5 points) 3+5+5,5+2

Exercice 1. (question de cours)

Soient E et F deux espaces vectoriels et u une application linéaire de E vers F. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, montrer que $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Exercice 2.

Pour une matrice à une ligne et une colonne de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ on posera $(a) = a$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, soient $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer ${}^tPP$, en déduire que P est inversible et donner P^{-1}.
2. Calculer $D = P^{-1}AP$
3. Calculer ${}^tXAX$
4. On pose $X' = P^{-1}X = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$

   Calculer ${}^tX'DX'$ et montrer que ce réel est strictement positif pour $X' \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ${}^tXAX \geq 0$.

   Indication : on pourra utiliser les questions précédentes.

Exercice 3.

Soient $a = (2, -1,1,2)$, $b = (2, -1,6,1)$ et $c = (6, -3,8,5)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, -7x + z + 5t = 0 \text{ et } x + y = 0\}$ et $F = Vect(a, b, c)$

1. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
2. Donner une base de E et une base de F.
3. A-t-on $E \oplus F = \mathbb{R}^4$?

Exercice 4.

Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficient dans $\mathbb{R}$ à 3 lignes et 3 colonnes.
Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient ${}^tA = A$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\dim(\mathcal{S}_3(\mathbb{R}))$.

Exercice 5.

Soit p l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui a tout vecteur $u = (x, y, z)$ associe le vecteur

$$p(u) = (2x + y + 2z, y, -x - y - z)$$

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note $p^2 = p \circ p$.

1. Montrer que p est une application linéaire.
2. Calculer $p(e_1)$, $p(e_2)$ et $p(e_3)$, puis $p^2(e_1)$, $p^2(e_2)$ et $p^2(e_3)$, que peut-on en déduire sur $p^2(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$?
3. Donner une base de $Im(p)$ et une base de $\ker(p - Id)$, montrer que ces deux espaces vectoriels sont égaux.
4. Montrer que $\ker(p) \oplus Im(p) = \mathbb{R}^3$