

## Suites de fonctions

### Exercice 1. Convergence uniforme

Etudier la convergence uniforme des deux suites de fonctions définies sur  $[0,1]$  par :

1.  $\forall n \geq 1, f_n(x) = \frac{ne^{-x+x^2}}{n+x}$

2.  $\forall n \geq 1, g_n(x) = \frac{n}{1+nx}$

Allez à : [Correction exercice 1](#)

### Exercice 2. Autre outil pour la convergence uniforme

Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\forall n \geq 0, \forall \alpha \geq 0, f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$$

Allez à : [Correction exercice 2](#)

### Exercice 3. Convergence uniforme et dérivation

1. Soit la suite de fonction  $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ . Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers une fonction  $f$  dérivable et constater que la suite  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne converge pas.

2. Soit  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

Montrer que chaque  $f_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}$  vers une fonction  $f$  qui n'est pas  $\mathcal{C}^1$ .

Allez à : [Correction exercice 3](#)

### Exercice 4. Convergence uniforme sur un ouvert

On pose  $f_n(x) = e^{-nx} \sin(nx)$  avec  $x \in \mathbb{R}^+$ . Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\mathbb{R}^+$  puis sur  $[a, +\infty[$  avec  $a > 0$ .

Allez à : [Correction exercice 4](#)

### Exercice 5. Convergence simple vers une fonction discontinue

Etudier la convergence, éventuellement uniforme, des suites de fonctions définies par :

a)  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f_n(x) = x^n$

b)  $g_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $g_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$

c)  $h_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $h_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$

Allez à : [Correction exercice 5](#)

### Exercice 6. Un cas pathologique

Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de fonction définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ nx & \text{pour } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{pour } x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

1. Faire une figure pour quelques valeurs de  $n$ .
2. Déterminer la limite de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  quand  $n$  tend vers l'infini.
3. Préciser si la convergence est uniforme dans les trois cas suivants :
  - Sur  $]-\infty, 0[$ .
  - Sur un segment contenant l'origine.
  - Sur  $[a, +\infty[$  où  $a > 0$ .

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7. Convergence uniforme et intégration

Soit  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x(1 - nx) & \text{pour } x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier la limite simple de la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
2. Calculer :

$$\int_0^1 f_n(t) dt$$

Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ?

3. Etudier la convergence uniforme sur  $[a, 1]$  avec  $a > 0$ .

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8. On considère la suite de fonctions réelle définies par

$$f_n(x) = \frac{x}{x+n} + \arctan(x), \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-elle ?

1. Simplement convergente sur  $[0,1]$  ?
2. Uniformément convergente sur  $]0,1[$  ?
3. Uniformément convergente sur  $[a, 1]$  ( $a \in ]0,1[$ ) ?
4. Uniformément convergente sur  $[1, +\infty[$  ?

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9. On considère la suite de fonctions réelles définies par

$$g_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Cette suite est-elle ?

1. Simplement convergente sur  $[0,1]$  ?
2. Uniformément convergente sur  $]0,1[$  ?
3. Uniformément convergente sur  $[a, 1]$  ( $a \in ]0,1[$ ) ?
4. Uniformément convergente sur  $[1, +\infty[$  ?

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10. On considère, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $f_n: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$f_n(x) = \sin(nx^2) e^{-nx^2}$$

1. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge simplement sur  $[-1,1]$  vers une fonction  $f$  que l'on déterminera.
2. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne converge pas uniformément vers  $f$  sur  $[0,1]$ .
3. Montrer que  $\forall a \in ]0,1[$ ,  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $[a, 1]$ .

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de fonctions définies sur  $[0,1]$  par

$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2}$$

1. Etudier la convergence simple de cette suite sur  $[0,1]$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$$

Et la limite de  $I_n$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

3. En déduire que la suite  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas uniformément convergente sur  $[0,1]$ .

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12. Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite de fonctions définies sur  $[-1,1]$  par

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

1. Montrer que  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[-1,1]$  vers 0.
2. Etudier la convergence de  $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sur  $[-1,1]$ .
3. On considère la suite  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie sur  $[-1,1]$  par

$$g_n(x) = \frac{\ln(1 + n^2 x^2)}{2n^2}$$

Montrer que  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément sur  $[-1,1]$  vers 0.

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$  définies par :

$$f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x + \frac{x}{1+x} + \cdots + \frac{x}{(1+x)^n} = \sum_{k=0}^n \frac{x}{(1+x)^k}$$

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$  définies par :

$$f_n: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } x \in [0, n] \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$$

Allez à : [Correction exercice 14](#)

## Corrections

Correction exercice 1.

1.

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} = e^{-x}$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $f: x \rightarrow e^{-x}$

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x} - \frac{ne^{-x} + x^2}{n+x} = \frac{e^{-x}(n+x) - (ne^{-x} + x^2)}{n+x} = \frac{xe^{-x} - x^2}{n+x} = \frac{x(e^{-x} - x)}{n+x}$$

Soit on essaye de calculer le sup de la valeur absolue de cette fonction sur l'intervalle  $[0,1]$ , ce qui ne s'annonce pas joyeux parce que la principale méthode est d'étudier la fonction, ou bien on cherche à majorer la valeur absolue de cette différence par une expression ne faisant plus apparaître de «  $x$  » en sachant que  $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| = \left| \frac{x(e^{-x} - x)}{n+x} \right| \leq \left| \frac{e^{-x} - x}{n+x} \right|$$

Car  $x \in [0,1]$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \left| \frac{e^{-x} - x}{n+x} \right| \leq \frac{|e^{-x}| + |-x|}{|n+x|} = \frac{e^{-x} + x}{n+x} \leq \frac{1+1}{n+0} = \frac{2}{n}$$

Car  $e^{-x} \leq 1$  et  $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n+0}$

On en déduit que

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément sur  $[0,1]$  vers la fonction  $x \rightarrow e^{-x}$ .

Allez à : **Exercice 1**

2.

$$\forall x \in [0,1], \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1+n(x+1)} = \frac{1}{x+1}$$

La suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement sur  $[0,1]$  vers  $x \rightarrow \frac{1}{x+1}$

$$f(x) - f_n(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{n}{1+n(x+1)} = \frac{1+n(x+1) - n(x+1)}{(x+1)(1+n(x+1))} = \frac{1}{(x+1)(1+n(x+1))}$$

Aucune majoration claire en vue, on va étudier (en vain ou presque) la fonction  $g_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$

$$g_n(x) = \frac{1}{(x+1)(1+n(x+1))} = \frac{1}{x+1+n(x+1)^2} > 0$$

$$g'_n(x) = -\frac{1+2n(x+1)}{(x+1+n(x+1)^2)^2}$$

Cette fonction s'annule pour

$$x_n = -\frac{1}{2n} - 1 = -\frac{2n+1}{2n}$$

Soit

$$x_n + 1 = -\frac{1}{2n}$$

Le maximum de cette fonction est donc en  $x_n = -\frac{2n+1}{2n}$  et vaut

$$g_n(x_n) = \frac{1}{x_n + 1 + n(x_n + 1)^2} = \frac{1}{-\frac{1}{2n} + n\left(-\frac{1}{2n}\right)^2} = \frac{1}{-\frac{1}{2n} + \frac{1}{4n}} = \frac{1}{\frac{1}{4n}} = 4n$$

Le maximum tend vers l'infini et donc il n'y a pas de convergence uniforme.

Si on n'a rien vu c'est parfait, sinon

$$g_n(x) = \frac{1}{(x+1)(1+n(x+1))} = \frac{1}{x+1+n(x+1)^2}$$

Donc

$$g_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{n+1}\left(1+n\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{n+1}\left(1+n\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{n+1}{1+\frac{n}{n+1}} \rightarrow +\infty$$

Comme

$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x \in [0,1]} g_n(x) \geq g_n\left(\frac{1}{n+1}\right) \rightarrow +\infty$$

Cela montre qu'il n'y a pas convergence uniforme.

Allez à : **Exercice 1**

Correction exercice 2.

Si  $x > 0$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur le  $n^\alpha$

Si  $x = 0$  alors  $f_n(0) = 0$

La suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle  $\Theta_{\mathbb{R}^+}$

Etude de  $|f_n - \Theta_{\mathbb{R}^+}| = f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$

$$f'_n(x) = n^\alpha e^{-nx} - n^{\alpha+1} x e^{-nx} = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx)$$

La dérivée est positive pour  $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ , nulle en  $\frac{1}{n}$  et négative pour  $x \in \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[$

Donc  $f_n$  admet un maximum en  $x_n = \frac{1}{n}$

$$f_n(x_n) = n^\alpha \frac{1}{n} e^{-\frac{n}{n}} = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Si  $\alpha \geq 1$  alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x) - \Theta_{\mathbb{R}^+}(x)| = f_n(x_n) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$$

Ne tend pas vers 0 donc la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $\Theta_{\mathbb{R}^+}$ .

Si  $\alpha < 1$  alors

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x) - \Theta_{\mathbb{R}^+}(x)| = f_n(x_n) = \frac{n^{\alpha-1}}{e} \rightarrow 0$$

Donc la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $\Theta_{\mathbb{R}^+}$ .

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1. Pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} = 0$$

La suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$  la fonction nulle sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , cette fonction est évidemment dérivable.

$$f'_n(x) = \frac{n \sin(nx)}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \sin(nx)$$

Sauf pour  $x = 0$  la suite  $(f'_n)$  n'a pas de limite.

Allez à : **Exercice 3**

2.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$$

La limite simple est  $f(x) = |x|$

Puis on cherche à montrer qu'il y a convergence uniforme

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| &= \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| = \frac{\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right) \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \\ &= \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n^2}} + 0} = \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| \leq \frac{1}{n}$$

Et enfin

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x| \right| = 0$$

La suite de fonction  $(f_n)$  converge uniformément vers  $f(x) = |x|$ , fonction qui n'est pas dérivable en 0 donc qui n'est pas de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

Si  $x > 0$  alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Car l'exponentielle l'emporte sur le  $n^\alpha$

Si  $x = 0$  alors  $f_n(0) = 0$

La suite de fonction converge simplement vers la fonction nulle  $\Theta_{\mathbb{R}^+}$

Etude de  $f_n$  sur  $\mathbb{R}^+$

$$f'_n(x) = ne^{-nx} \cos(nx) - ne^{-nx} \sin(nx) = ne^{-nx} \cos(nx) (1 - \tan(nx))$$

Là on voit que l'on ne va pas s'en sortir, alors que

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1} \sin(1)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f_n(x) - \Theta_{\mathbb{R}^+}(x)| \leq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-1} \sin(1) \neq 0$$

Donc la suite de fonctions  $(f_n)$  ne converge pas uniformément vers  $\Theta_{\mathbb{R}^+}$ .

Sur  $[a, +\infty[$ , la suite de fonctions converge simplement vers  $\Theta_{[a, +\infty[}$

Comme sur  $\mathbb{R}^+$  l'étude de la fonction ne va rien donner mais une simple majoration va nous permettre de conclure

$$|f_n(x) - \Theta_{[a, +\infty[}(x)| = e^{-nx} |\sin(nx)| \leq e^{-nx} \leq e^{-na}$$

Donc

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x) - \Theta_{[a, +\infty[}(x)| \leq e^{-na} \rightarrow 0$$

On en déduit que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $\Theta_{[a, +\infty[}$ .

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

a) Si  $x \in [0, 1[$  alors  $x^n$  tend vers 0 et si  $x = 1$  alors  $x^n = 1$ , ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[ \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues  $(f_n)$  convergeait uniformément vers  $f$  alors  $f$  serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

b) Si  $x \in ]0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{nx + 1} = 1$$

Si  $x = 0$  alors  $g_n(0) = 0$

Ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction  $g$  définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in ]0, 1] \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues  $(g_n)$  convergeait uniformément vers  $g$  alors  $g$  serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

c) Si  $x \neq 0$  alors  $1 + x^2 > 1$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + x^2)^n} = 0$$

Si  $x = 0$  alors  $h_n(0) = 1$

Ce qui montre que la suite de fonction converge simplement vers la fonction  $h$  définie par

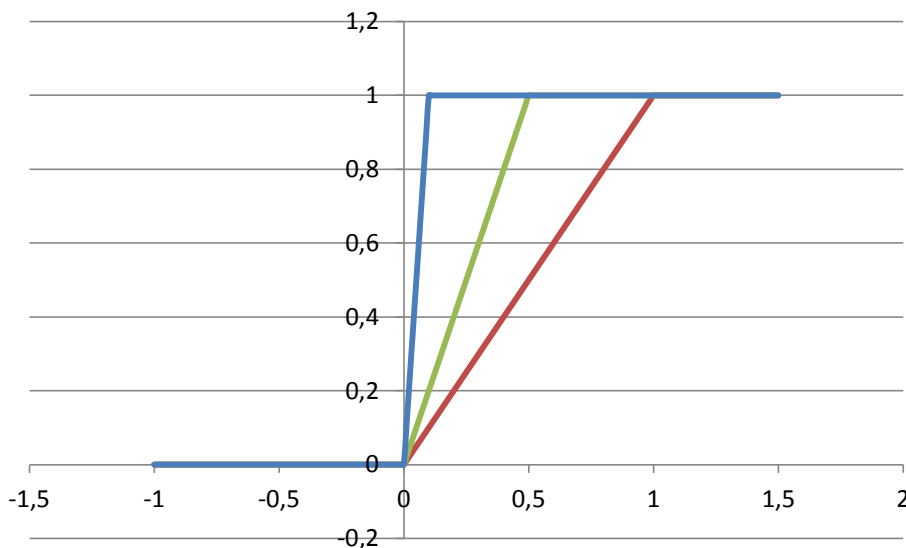
$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Si la convergence de la suite de fonctions continues  $(h_n)$  convergeait uniformément vers  $h$  alors  $h$  serait continue, ce qui n'est pas le cas par conséquent la convergence n'est pas uniforme.

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

1.



Courbes pour  $n = 1, n = 2$  et  $n = 10$

2.

Si  $x \leq 0, f_n(x) = 0 \rightarrow 0$

Si  $x > 0$ , il existe  $n_0$  tel que  $\frac{1}{n_0} < x$  et pour tout  $n \geq n_0 f_n(x) = 1 \rightarrow 1$

Donc la suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3. Sur  $]-\infty, 0[$  la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{]-\infty, 0[}$

Comme

$$f_n(x) - \Theta_{]-\infty, 0[}(x) = 0$$

La convergence est uniforme

Sur un segment contenant l'origine la suite de fonctions  $(f_n)$  converge vers une fonction qui est nulle si  $x \leq 0$  et qui vaut 1 pour  $x > 0$ , c'est-à-dire une fonction discontinue or les fonctions  $f_n$  sont continues, en  $x = 0$  les limites à gauche et à droite valent 0 et en  $x = 1$  les limites à gauche et à droite valent 1, il n'y a pas convergence uniforme.

Sur  $[a, +\infty[$  la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f$  qui vaut 1 pour tout  $x \geq a$

Comme

$$f_n(x) - f(x) = 1 - 1 = 0$$

Il y a convergence uniforme.



Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1. Pour  $x \in ]0,1]$ , il existe  $n_0$  tel que  $\frac{1}{n_0} < x$ , alors pour tout  $n \geq n_0$   $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$

Pour  $x = 0$  alors  $f_n(0) = 0$

Donc la suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{[0,1]}$ .

2.

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t(1-nt) dt = n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} (t - nt^2) dt = n^2 \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{nt^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{n}} = n^2 \left( \frac{1}{2n^2} - \frac{n}{3n^3} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

S'il y avait convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$  on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \Theta_{[0,1]}(t) dt = 0$$

Ce qui n'est pas le cas, donc il n'y a pas de convergence uniforme de la suite de fonctions  $(f_n)$  vers  $\Theta_{[0,1]}$ .

3. Sur  $[a, 1]$  la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{[a,1]}$ , pour tout  $n > \frac{1}{a} \Leftrightarrow a > \frac{1}{n}$ , et pour tout  $x \in [a, 1], f_n(x) = 0$  donc

$$f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x) = 0$$

Donc il y a convergence uniforme.

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

1. Pour tout  $x \in [0,1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \arctan(x)$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $\arctan$  sur  $[0,1]$ .

2. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $\arctan$  sur  $]0,1]$ .

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$

On peut étudier cette fonction  $(x \rightarrow \frac{x}{x+n})$  sur  $]0,1]$ , on voit qu'elle est croissante et qu'elle atteint son maximum pour  $x = 1$  et alors

$$\sup_{x \in ]0,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{1}{1+n} \rightarrow 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur  $]0,1]$

Ou alors on peut majorer de façon à éliminer les «  $x$  »

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}$$

Ainsi

$$\sup_{x \in ]0,1]} |f_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur  $]0,1]$

3. La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $[a, 1]$  vers  $\arctan$  sur  $[a, 1]$ .

On peut faire les deux raisonnements de la question ci-dessus

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$

On peut étudier cette fonction  $(x \rightarrow \frac{x}{x+n})$  sur  $[a, 1]$ , on voit qu'elle est croissante et qu'elle atteint son maximum pour  $x = 1$  et alors

$$\sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{1}{1+n} \rightarrow 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur  $[a, 1]$

Ou alors on peut majorer de façon à éliminer les «  $x$  », attention ici, il y a une petite nuance

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{a+n}$$

Mais on aurait aussi pu majorer par  $\frac{1}{n}$ .

Ainsi

$$\sup_{x \in [a, 1]} |f_n(x) - \arctan(x)| \leq \frac{1}{a+n} \rightarrow 0$$

Pour en déduire qu'il y a convergence uniforme sur  $[a, 1]$

4. Pour tout  $x \in [1, +\infty[$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \arctan(x)$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $\arctan$  sur  $[1, +\infty[$ .

$$|f_n(x) - \arctan(x)| = \frac{x}{x+n}$$

Là, on va avoir un problème pour majorer cette expression indépendamment de  $x$  par une expression qui tend vers 0.

Montrons qu'il n'y a pas convergence uniforme, prenons  $x_n = n$

$$\sup_{x \in [1, +\infty[} |f_n(x) - \arctan(x)| \geq |f_n(x_n) - \arctan(x_n)| = \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}$$

Ce sup ne peut pas tendre vers 0, il n'y a pas convergence uniforme.

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

1. Pour tout  $x \in ]0, 1]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = 1$$

Il faut bien distinguer le cas  $x \neq 0$  (c'est la limite des termes de plus haut degré) et le cas où  $x = 0$ , auquel cas  $g_n(0) = 1$

La suite de fonctions  $(g_n)$  converge simplement vers la fonction  $g$  constante à 1 sur  $[0, 1]$

2.

$$|g(x) - g_n(x)| = \left| 1 - \frac{nx}{1+nx} \right| = \left| \frac{1+nx - nx}{1+nx} \right| = \frac{1}{1+nx}$$

Etude de la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{1+nx}$  sur  $]0, 1]$ , sa dérivée est  $-\frac{n}{(1+nx)^2} < 0$  la fonction est décroissante, donc

$$\sup_{x \in ]0, 1]} \frac{1}{1+nx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+nx} = 1$$

Cette expression ne tend pas vers 0 donc il n'y a pas convergence uniforme sur  $]0, 1]$ .

Autre méthode

$$\sup_{x \in ]0, 1]} |g(x) - g_n(x)| \geq \left| g\left(\frac{1}{n}\right) - g_n\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{1+n\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

Donc le sup ne peut pas tendre vers 0 et il n'y a pas convergence uniforme sur  $]0, 1]$

3. La suite de fonctions  $(g_n)$  converge simplement vers la fonction constante égal à 1. Reprenons l'étude de la fonction

$$|g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + nx}$$

Elle est décroissante donc elle atteint son sup pour  $x = a$

$$\sup_{x \in [a,1]} |g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + na} \rightarrow 0$$

Dans ce cas il y a convergence uniforme de la suite de fonction  $(g_n)$  vers la fonction constante égal à 1.

4. La suite de fonctions  $(g_n)$  converge simplement vers la fonction constante égal à 1 sur  $[1, +\infty[$ . Reprenons l'étude de la fonction

$$|g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + nx}$$

Elle est décroissante donc elle atteint son sup pour  $x = 1$

$$\sup_{x \in [a,1]} |g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{1 + n} \rightarrow 0$$

Dans ce cas il y a convergence uniforme de la suite de fonction  $(g_n)$  vers la fonction constante égal à 1 sur  $[1, +\infty[$ .

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

1.  $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$  et pour tout  $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$$

Donc la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{[-1,1]}$

2. la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{[0,1]}$ , l'étude de la fonction n'a rien de réjouissant à priori, prenons la suite  $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - \Theta_{[0,1]}(x)| = \sup_{x \in [0,1]} |\sin(nx^2)| e^{-nx^2} \geq |\sin(nx_n^2)| e^{-nx_n^2} = |\sin(1)| e^{-1}$$

Ce sup ne peut pas tendre vers 0, il n'y a pas convergence uniforme sur  $[0,1]$ .

3. la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{[a,1]}$ ,

$$|f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x)| = |\sin(nx^2)| e^{-nx^2} \leq e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$$

Donc

$$\sup_{x \in [a,1]} |f_n(x) - \Theta_{[a,1]}(x)| \leq e^{-na^2} \rightarrow 0$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $\Theta_{[a,1]}$  sur  $[a, 1]$ .

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1. Pour tout  $x \in ]0,1]$

$$\frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} \sim \frac{2^n x}{2^n n x^2} = \frac{1}{n x} \rightarrow 0$$

$$f_n(0) = 0$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{[0,1]}$  sur  $[0,1]$

- 2.

$$I_n = \int_0^1 \frac{2^n x}{1 + 2^n n x^2} dx = \left[ \frac{1}{n} \ln(1 + 2^n n x^2) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n} \ln(1 + 2^n n)$$

$$= \frac{1}{n} \ln(2^n (2^{-n} + n))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n} (\ln(2^n) + \ln(2^{-n} + n)) \\
&= \frac{1}{n} (n \ln(2) + \ln(2^{-n} + n)) \\
&= \ln(2) + \frac{1}{n} \ln(2^{-n} + n) \\
&= \ln(2) + \frac{1}{n} \ln \left( n \left( \frac{2^{-n}}{n} + 1 \right) \right) \\
&= \ln(2) + \frac{1}{n} \ln(n) + \frac{1}{n} \ln \left( \frac{2^{-n}}{n} + 1 \right) \\
&\frac{1}{n} \ln \left( \frac{2^{-n}}{n} + 1 \right) \sim \frac{1}{n} \times \frac{2^{-n}}{n} \rightarrow 0 \\
&\frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \ln(2)$$

3. Si la suite de fonctions  $(f_n)$  convergeait uniformément vers  $\Theta_{[0,1]}$  on aurait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \Theta_{[0,1]}(x) dx = 0$$

Ce qui n'est pas le cas donc la suite de fonctions ne converge pas uniformément sur  $[0,1]$ .

Allez à : **Exercice 11**

Correction exercice 12.

1. Avant la convergence uniforme il faut montrer que la suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{[-1,1]}$ .  $f_n(0) = 0 \rightarrow 0$  et pour tout  $x \neq 0$  la limite de  $f_n(x)$  est bien nulle, tout va bien.

On ne voit pas de majorations simple qui permettrait de majorer  $|f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)|$  par une expression indépendante de  $x$  qui tendrait vers 0, on va donc étudier la fonction

$$h_n(x) = |f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)| = \frac{|x|}{1 + n^2 x^2}$$

La fonction étant paire, on va faire l'étude sur  $[0,1]$  ainsi on se débarrasse de la valeur absolue.

$$\begin{aligned}
h_n(x) &= \frac{x}{1 + n^2 x^2} \\
h'_n(x) &= \frac{1 + n^2 x^2 - x \times 2n^2 x}{(1 + n^2 x^2)^2} = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}
\end{aligned}$$

$x$	0	$\frac{1}{n}$	
	1		
$h'_n(x)$		+	0 -
$h_n(x)$	0	$\frac{1}{2n}$	$\frac{1}{1+n^2}$

On en déduit que le sup de

$$\sup_{x \in [-1,1]} |f_n(x) - \Theta_{[-1,1]}(x)| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers  $\Theta_{[-1,1]}$  sur  $[-1,1]$ .

2. En réutilisant le calcul ci-dessus

$$f'_n(x) = \frac{1 - n^2 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2}$$

Pour tout  $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 x^2}{(n^2 x^2)^2} = 0$$

Pour  $x = 0$ ,  $f'_n(0) = 1$  donc la suite de fonctions  $(f'_n)$  converge simplement vers la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Ce qui permet de dire que la convergence de la suite de fonctions continues  $(f'_n)$  ne converge pas uniformément sinon la limite simple serait continue ce qui n'est pas le cas.

3. Calculons  $g'_n(x)$ , pour voir.

$$g'_n(x) = \frac{1}{2n^2} \times \frac{2n^2 x}{1 + n^2 x^2} = \frac{x}{1 + n^2 x^2} = f_n(x)$$

Ah bah ça alors quelle surprise !!!!

La suite de fonctions  $(g'_n)$  converge uniformément sur  $[-1,1]$ . Pour  $x_0 = 0$   $g_n(0) = 0$  donc la suite de terme général  $g_n(x_0)$  converge simplement car la suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement vers  $\Theta_{[-1,1]}$ , on en déduit d'après le théorème de dérivation que la suite de terme général  $(g_n)$  converge uniformément vers  $\Theta_{[-1,1]}$ .

Allez à : **Exercice 12**

Correction exercice 13.

$$f_n(x) = x \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{1+x}\right)^k$$

Si  $\frac{1}{1+x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$  alors

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x \frac{1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{1+x}} = \left(1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\right) \frac{x(1+x)}{1 - (1+x)} = \left(1 - \left(\frac{1}{1+x}\right)^{n+1}\right) \frac{x(1+x)}{-x} \\ &= 1 + x - \left(\frac{1}{1+x}\right)^n \end{aligned}$$

Comme  $1 + x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1 + x$$

Si  $x = 0$

$$f_n(0) = 0 \rightarrow 0$$

La suite de fonctions  $(f_n)$  converge simplement vers la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 + x & \text{si } x \in ]0,1] \end{cases}$$

Les fonctions  $f_n$  sont continues, si la convergence était uniforme la fonction  $f$  serait continue or  $f$  n'est pas continue en  $x = 0$

Allez à : **Exercice 13**

Correction exercice 14.

Convergence simple

Pour tout  $x$  il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $n_0 > x$  donc pour tout  $n > n_0$ ,  $x \in [0, n]$ , il faut donc trouver la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini de  $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)} = e^{n \left(-\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-x + o(1)} \rightarrow e^{-x}$$

La suite de fonction  $(f_n)$  converge simplement vers  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = e^{-x}$

Convergence uniforme

$$\forall x \in [0, n[, f(x) - f_n(x) = e^{-x} - e^{n \ln(1 - \frac{x}{n})} = e^{-x} \left( 1 - e^{n \ln(1 - \frac{x}{n}) + x} \right)$$

On pose

$$g_n(x) = n \ln \left( 1 - \frac{x}{n} \right) + x$$

$$g'_n(x) = n \times \frac{-\frac{1}{n}}{1 - \frac{x}{n}} + 1 = \frac{-1}{1 - \frac{x}{n}} + 1 = \frac{-1 + \left( 1 - \frac{x}{n} \right)}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{-\frac{x}{n}}{1 - \frac{x}{n}} = \frac{-x}{n - x} < 0$$

$x$	0	$n$
$g'_n(x)$	-	
$g_n(x)$	0	$-\infty$

Donc pour tout  $x \in [0, n[, g_n(x) \leq 0$ , ce qui montre que

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x} \left( 1 - e^{g_n(x)} \right) \geq 0$$

On pourrait se passer d'avoir montré cela.

On pose  $h_n(x) = f(x) - f_n(x)$  et on va chercher les extrémums de cette fonction continue et dérivable sur le fermé borné  $[0, n]$ , ces extrémums sont soit sur les bords en  $h_n(0) = f(0) - f_n(0) = 1 - 1 = 0$ , c'est un minimum, soit en  $x = n$ ,  $h_n(n) = f(n) - f_n(n) = e^{-n}$ , soit en un point où la dérivée est nulle.

$$h'_n(x) = -e^{-x} - n \left( -\frac{1}{n} \right) \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^{n-1} = -e^{-x} + \left( 1 - \frac{x}{n} \right)^{n-1}$$

Supposons qu'il existe  $x_n \in [0, n]$  (ce qui impose que  $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq 1$  tel que  $h'_n(x_n) = 0$ , rien n'est moins sûr, il se peut que ce  $x_n$  n'existe pas (par exemple si  $h'_n(x)$  garde un signe constant) soit que ce  $x_n$  soit supérieur à  $n$ , mais peu importe.

$$h'_n(x_n) = 0 \Leftrightarrow -e^{-x_n} + \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^{n-1} = 0 \Leftrightarrow e^{-x_n} = \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^{n-1}$$

Puis calculons  $h_n(x_n)$

$$h_n(x_n) = f(x_n) - f_n(x_n) = e^{-x_n} - \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^n = \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^{n-1} - \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^n$$

$$= \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^{n-1} \left( 1 - \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right) \right) = \frac{x_n}{n} \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^{n-1}$$

Deux cas se présentent

- Soit

$$0 \leq 1 - \frac{x_n}{n} \leq M < 1 \Leftrightarrow 1 - M < \frac{x_n}{n} < M$$

Dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x_n) = 0$$

- Soit

$$1 - \frac{x_n}{n} \rightarrow 1 \Leftrightarrow \frac{x_n}{n} \rightarrow 0$$

Dans ce cas

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n} \left( 1 - \frac{x_n}{n} \right)^{n-1} = 0$$

Dans tous les cas, que  $x_n$  existe ou pas le maximum éventuel tend vers 0

Et pour tout  $x \geq n$ , comme  $f_n(x) = 0$

$$|f(x) - f_n(x)| = e^{-x} \leq e^{-n}$$

Finalement

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^+} |f(x) - f_n(x)| = \max(h_n(x_n), e^{-n}) \rightarrow 0$$

Allez à : **Exercice 14**