

## Séries numériques

Exercice 1. Etudier la convergence des séries suivantes :

1.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

2.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots$$

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2. Etudier la convergence des séries suivantes :

$$S_1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2}; \quad S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}}; \quad S_3 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3}$$
$$S_4 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; \quad S_5 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(ne^{\frac{1}{n}} - n\right); \quad S_6 = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-n})$$

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3. Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1.  $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

2.  $u_n = \frac{1}{n \cos^2(n)}$

3.  $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4. Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ est un carré} \\ \frac{1}{n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5. Les sommes suivantes sont-elles finies ?

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{5^n}; \quad S_2 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n; \quad S_3 = \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n-2}}; \quad S_4 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}}; \quad S_5 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}$$

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6. Existence et calcul de :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7. Soit  $(u_n)$  une suite de réels positifs et  $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$

Montrer que les séries  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  sont de même nature.

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8. Déterminer en fonction du paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}$  la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$$

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9. Etudier la nature de la série de terme général  $u_n$  :

1.  $u_n = \frac{n+1}{n^3-7}$

2.  $u_n = \frac{n+1}{n^2-7}$

3.  $u_n = \frac{n+1}{n-7}$

4.  $u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

5.  $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$

6.  $u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$

7.  $u_n = \frac{\ln(n)}{\frac{3}{n^2}}$

8.  $u_n = \frac{n}{2^n}$

9.  $u_n = \frac{2^n+3^n}{n^2+\ln(n)+5^n}$

10.  $u_n = \frac{1}{n!}$

11.  $u_n = \frac{n^{10000}}{n!}$

12.  $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$

13.  $u_n = \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

14.  $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

15.  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

Montrer que la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(\sqrt{n}+1)}$  est semi-convergente.

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11. Etudier la convergence de la série numérique de terme général  $u_n$  :

1.  $u_n = (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ .

2.  $u_n = \frac{a^n}{n!}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

3.  $u_n = na^{n-1}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

4.  $u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right)$ .

5.  $u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

6.  $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$

7.  $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12. Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{avec} \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!}$$

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13. Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{avec} \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}}$$

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14. Etudier la nature des séries de terme général et calculer leur somme :

1.  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \geq 1$
2.  $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}, n \geq 1$
3.  $u_n = \frac{2n-1}{n(n^2-4)}, n \geq 3$
4.  $u_n = (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right), n \geq 2$
5.  $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right), n \geq 1$

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

Si  $(v_n)_{n \geq 0}$  est une suite numérique tendant vers 0 et si  $a, b, c$  sont trois réels vérifiant  $a + b + c = 0$ , on pose pour tout  $n \geq 0$  :

$$u_n = av_n + bv_{n+1} + cv_{n+2}$$

Montrer que la suite de terme général  $u_n$  converge et calculer sa somme.

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16. Etudier la convergence des séries de terme général :

1.  $u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3+1}{n^2+1}\right)$
2.  $u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{2011}$
3.  $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin(x)} dx$
4.  $u_n = \frac{1+(-1)^n \sqrt{n}}{1+n}$
5.  $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^n}$
6.  $u_n = \frac{2^n}{n^2} (\sin(\alpha))^{2n}$

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :

$$u_n = n! \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{a}{k}\right), \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \pi\mathbb{N}$$

1. On suppose que  $a \neq 1$ . En étudiant la suite  $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$  préciser

- a) La nature de la série  $\sum u_n$ .
- b) La nature de la suite  $(u_n)$ .

2.

- a) Si  $a_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ , quelle est la nature de la série  $\sum a_n$  ?
- b) Quelle est la nature de la suite  $(u_n)$  pour  $a = 1$ .

Allez à : [Correction exercice 17](#)

Exercice 18.

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_1 = 1$  et  $u_{n+1} = \frac{1}{n} e^{-u_n}$  pour tout  $n \geq 1$ .

- 1. Nature de la série  $\sum u_n$  ?
- 2. Nature de la série  $\sum (-1)^n u_n$  ?

Allez à : [Correction exercice 18](#)

Exercice 19.

Montrer que la suite  $u_n = \frac{e^{n!}}{n^{n+\frac{1}{2}}}$  converge, on pourra d'abord montrer que la série de terme général

$$z_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$$

est convergente.

Allez à : [Correction exercice 19](#)

Exercice 20.

Nature de la série de terme général (convergence et absolue convergence).

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

Allez à : [Correction exercice 20](#)

Exercice 21.

Montrer que les séries de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$$

Ne sont pas de mêmes natures et que pourtant  $u_n \sim v_n$ .

Allez à : [Correction exercice 21](#)

Exercice 22. On pose

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

- 1. Montrer que la suite  $f(n)$  est positive et décroissante. Au moyen d'une intégration par parties donner une relation de récurrence entre  $f(n)$  et  $f(n-1)$ .

Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 0$

$$f(n) = \frac{n!}{e} \left( e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

- 2. Montrer que l'on a :

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la nature des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$$

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)x^n$$

Exercice 23. On considère la série numérique de terme général  $u_n$  pour  $n \geq 1$  et  $a \in \mathbb{R}$  :

$$u_n = \left( n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^{n^a}$$

1. Montrer que si cette série est convergente pour une valeur  $a$  donnée, elle converge pour tout  $b \geq a$ .
2. Montrer que si  $a \leq 2$  la série est divergente.

On pourra utiliser un développement limité de  $\ln(u_n)$ .

3. On pose  $a = 2 + \epsilon$  avec  $0 < \epsilon < 1$

Montrer que  $u_n$  est équivalent à  $\exp\left(-\frac{1}{6}n^\epsilon\right)$ . En déduire que la série est alors convergente.

4. Donner toutes les valeurs de  $a$  pour lesquelles cette série converge.

Allez à : [Exercice 23](#)

Exercice 24.

Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

1.
  - a) Calculer  $u_0$ .
  - b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

2.
  - a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on a :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^n v_k = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_{n+1}$$

c) Montrer que la série de terme général  $v_n$  converge et calculer sa somme.

Allez à : [Exercice 24](#)

## Corrections

Correction exercice 1.

1. Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec  $\alpha = 1 \leq 1$
- 2.

$$\frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2k}$$

Il s'agit d'une série de Riemann divergente avec  $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : **Exercice 1**

Correction exercice 2.

$\frac{n^2+1}{n^2} \rightarrow 1 \neq 0$  donc la série ne converge pas

$\frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$  il s'agit du terme général d'une série de Riemann divergente avec  $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$

$$\frac{(2n+1)^4}{(7n^2+1)^3} \sim \frac{2^4}{7^3} \times \frac{1}{n^2}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec  $\alpha = 2 > 1$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e^{-1+o(1)} \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0$$

La série diverge.

$$ne^{\frac{1}{n}} - n = n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) = 1 + o(1) \rightarrow 1 \neq 0$$

La série diverge.

$$\ln(1 + e^{-n}) \sim e^{-n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans  $] -1, 1[$ .

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1.

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n+1+o(1)} \\ &= e^{-n} e^{1+o(1)} \sim e^{-n} \times e = e \left(\frac{1}{e}\right)^n \end{aligned}$$

Il s'agit d'une suite géométrique de raison dans  $] -1, 1[$ , la série converge.

2.

$$u_n = \frac{1}{n \cos^2(n)} > \frac{1}{n}$$

Il s'agit d'une série à termes positifs supérieurs à  $\frac{1}{n}$ , qui est le terme général d'une série de Riemann divergente avec  $\alpha = 1 \leq 1$ . La série diverge.

3.

$$\frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}} = \frac{1}{e^{\ln(n) \times \ln(\ln(n))}} = \frac{1}{(e^{\ln(n)})^{\ln(\ln(n))}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}}$$

Après ce petit effort « formel » on applique la règle de Cauchy

$$n^2 u_n = n^2 \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln(n))-2}}$$

Comme  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\ln(\ln(n)) \rightarrow +\infty$  et donc  $n^2 u_n \rightarrow 0 < 1$  d'après les règles de Riemann la série converge.

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1 \text{ et } n \neq p^2}^N u_n + \sum_{n=1 \text{ et } n=p^2}^N u_n > \sum_{n=1 \text{ et } n=p^2}^N u_n = \sum_{n=1}^{N^2} \frac{1}{n}$$

Cette dernière série diverge (Riemann avec  $\alpha = 1 \leq 1$  donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

Expliquons quand même un peu

$$\sum_{n=1}^N u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{10^2} + \dots$$

Ainsi, il est plus clair que tous les «  $\frac{1}{n}$  » sont dans la série et que donc la série diverge.

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

- $\frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$  est le terme général d'une série géométrique de raison dans  $] -1, 1[$ , la série converge.
- $\left(\frac{-1}{3}\right)^n$  est le terme général d'une série géométrique de raison dans  $] -1, 1[$ , la série converge.
- $\frac{2^n}{3^{n-2}} = 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$  est le terme général d'une série géométrique de raison dans  $] -1, 1[$ , la série converge.
- $\left| \frac{\tan^n\left(\frac{\pi}{7}\right)}{3^{n+2}} \right| \leq \frac{1}{3^{n+2}} = \frac{1}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$  est le terme général d'une série géométrique de raison dans  $] -1, 1[$ , la série converge.
- $\frac{9}{(3n+1)(3n+4)} \sim \frac{1}{n^2}$  est le terme général d'une série de Riemann convergente avec  $\alpha = 2 > 1$ .

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$  est de signe constant (négatif) et

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{n^2}$$

Est le terme général d'une série de Riemann convergente avec  $\alpha = 2 > 1$ .

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

Si la série de terme général  $u_n$  converge, alors  $u_n \rightarrow 0$  donc  $v_n \sim u_n$  comme ce sont des séries à termes positifs, la série de terme général  $v_n$  converge, si elle diverge alors la série de terme général  $v_n$  diverge, bref, les deux séries sont de mêmes natures.

Réciproquement

$$v_n = \frac{u_n}{1 + u_n} \Leftrightarrow v_n(1 + u_n) = u_n \Leftrightarrow v_n + u_n v_n = u_n \Leftrightarrow v_n = u_n(1 - v_n) \Leftrightarrow u_n = \frac{v_n}{1 - v_n}$$

On a encore  $u_n \sim v_n$  donc les séries sont de mêmes natures.

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

Si  $\alpha > 1$ , alors on utilise la règle de Riemann avec  $\beta \in ]\alpha, 1[$

$$n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} \rightarrow 0 < 1$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Cela montre que la série de terme général  $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$  converge car  $\beta < 1$

Si  $\alpha < 1$ , alors on utilise la règle de Riemann avec  $\beta \in ]1, \alpha[$

$$n^\beta \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = n^{\alpha-\beta} \ln(n) \rightarrow +\infty$$

Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Cela montre que la série de terme général  $\frac{\ln(n)}{n^\alpha}$  diverge car  $\beta > 1$

Lorsque  $\alpha = 1$ , c'est plus compliqué, les règles de Riemann ne marche pas. Il s'agit d'une série à termes positifs, on peut appliquer la comparaison à une intégrale

$$x \rightarrow \frac{1}{x \ln(x)}$$

Est intégrable car

$$\int_2^X \frac{1}{x \ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_2^X = \ln(\ln(X)) - \ln(\ln(2)) \rightarrow +\infty$$

Lorsque  $X$  tend vers l'infini, ce qui montre que l'intégrale est divergente, la fonction  $x \rightarrow \frac{1}{x \ln(x)}$  est clairement décroissante et tend vers 0 en l'infini, donc la série de terme général  $\frac{1}{n \ln(n)}$  diverge.

Allez à : **Exercice 8**

Remarque :

C'est ce que l'on appelle la règle de Duhamel.

Correction exercice 9.

1. La suite  $(u_n)$  est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec  $\alpha = 2 > 1$

Allez à : **Exercice 9**

2. La suite  $(u_n)$  est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec  $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : **Exercice 9**

3.  $u_n \rightarrow 1 \neq 0$  la série diverge grossièrement

Allez à : **Exercice 9**

4. La suite  $(u_n)$  est de signe constant

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann convergente avec  $\alpha = 2 > 1$

Allez à : **Exercice 9**

5. Méfiance

$$u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{n} n^{-\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(n)}$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = 0$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} \ln(n)} = 1$$

Ce qui montre que

$$u_n \sim \frac{1}{n}$$

C'est le terme général d'une série de Riemann divergente avec  $\alpha = 1 \leq 1$

Allez à : **Exercice 9**

6.  $u_n$  est de signe constant

$$u_n = \frac{1}{\ln(n^2 + 2)} = \frac{1}{\ln\left(n^2\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\right)} = \frac{1}{2\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)} = \frac{1}{2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$n^{\frac{1}{2}}u_n = n^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2\ln(n) + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \rightarrow +\infty$$

D'après les règles de Riemann  $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$  avec  $\alpha < 1$  entraîne que la série de terme général  $u_n$  diverge.

Allez à : **Exercice 9**

7.  $u_n$  est de signe constant

$$n^{\frac{5}{4}}u_n = n^{\frac{5}{4}} \frac{\ln(n)}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{\ln(n)}{n^{\frac{1}{4}}} \rightarrow 0$$

D'après les règles de Riemann  $n^\alpha u_n \rightarrow +\infty$  avec  $\alpha > 1$  entraîne que la série de terme général  $u_n$  converge.

Allez à : **Exercice 9**

8.  $u_n$  est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$$

D'après la règle de D'Alembert la série de terme général  $u_n$  converge.

Allez à : **Exercice 9**

9.  $u_n$  est de signe constant

$$u_n = \frac{2^n + 3^n}{n^2 + \ln(n) + 5^n} \sim \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

$\left(\frac{3}{5}\right)^n$  est le terme général d'une série géométrique convergente, la série de terme général  $u_n$  converge.

Allez à : **Exercice 9**

10.  $u_n$  est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général  $u_n$  converge.

Allez à : **Exercice 9**

11.  $u_n$  est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)^{10000}}{(n+1)!}}{\frac{n^{10000}}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{10000} \times \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

D'après la Règle de D'Alembert la série de terme général  $u_n$  converge.

Allez à : **Exercice 9**

12.  $u_n$  est de signe constant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{4^{n+2}((n+2)!)^2}{(2n+1)!}}{\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}} = \frac{4^{n+2}((n+2)!)^2(2n-1)!}{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n+1)!} = 4 \frac{((n+2)^2((n+1)!)^2(2n-1)!)}{((n+1)!)^2(2n+1)2n(2n-1)!}$$

$$= 4 \frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n} \sim 1$$

Cà ce n'est pas de chance, sauf si on peut montrer que la limite est 1 par valeur supérieure

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4 \frac{(n+2)^2}{(2n+1)2n} = \frac{4(n^2+4n+4)}{4n^2+2n} = \frac{4n^2+16n+16}{4n^2+2n} > 1$$

Ouf ! La limite est  $1^+$  donc la série de terme général diverge.

Allez à : **Exercice 9**

13.  $u_n$  est de signe constant

$$u_n = \left( \sin\left(\frac{1}{n}\right) \right)^n = e^{n \sin\left(\frac{1}{n}\right)} = e^{n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0$$

La série de terme général  $u_n$  diverge grossièrement

Remarque : il était inutile de faire un développement limité à l'ordre 3 de  $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ .

Allez à : **Exercice 9**

14.  $u_n$  est de signe constant

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)} = e^{n^2\left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n - \frac{1}{2} + o(1)} = e^{-n} e^{-\frac{1}{2} + o(1)} \sim \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$\frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{e}\right)^n$  est le terme général d'une suite géométrique de raison  $\frac{1}{e}$  strictement inférieure à 1. La série de terme général  $u_n$  converge.

Allez à : **Exercice 9**

15.

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} > 1$$

Donc  $u_n$  ne peut pas tendre vers 0.

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

On pose

$$f(x) = \frac{1}{\ln(\sqrt{x} + 1)}$$

$$f'(x) = -\frac{(\ln(\sqrt{x} + 1))'}{(\ln(\sqrt{x} + 1))^2} = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\ln(\sqrt{x} + 1)}}{(\ln(\sqrt{x} + 1))^2} < 0$$

Donc la suite de terme général  $u_n = f(n)$  est décroissante, elle tend vers 0, d'après le TSSA la série converge.

$$|u_n| = \frac{1}{\ln(\sqrt{n} + 1)}$$

$$n^{\frac{1}{2}} |u_n| = \frac{1}{\ln(\sqrt{n} + 1)} \rightarrow +\infty$$

D'après les règles de Riemann si  $n^\alpha |u_n| \rightarrow +\infty$  avec  $\alpha > 1$  la série de terme général  $|u_n|$  diverge ce qui montre que la série de terme général ne converge pas absolument. Cette série est donc semi-convergente.

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1. On pose  $v_n = |u_n| = \frac{n^3}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \times \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général  $v_n$  converge, donc la série de terme général  $u_n$  converge absolument, donc elle converge.

2. On pose  $v_n = |u_n| = \frac{|a|^n}{n!}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{n+1} \rightarrow 0$$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général  $v_n$  converge, donc la série de terme général  $u_n$  converge absolument, donc elle converge.

3. On pose  $v_n = |u_n| = n|a|^{n-1}$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)|a|^n}{n|a|^{n-1}} = \frac{n+1}{n}|a| \rightarrow |a|$$

Si  $|a| < 1$

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général  $v_n$  converge, donc la série de terme général  $u_n$  converge absolument, donc elle converge.

Si  $|a| \geq 1$ ,  $|u_n| \rightarrow +\infty$  donc la série diverge grossièrement

4.

$$u_n = \sin\left(\frac{n^2+1}{n}\pi\right) = \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Il s'agit d'une série alternée car  $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \geq 0$ , il est à peu près évident que  $a_n$  est décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA, la série converge.

Remarque : on pourrait montrer qu'elle semi-convergente.

5.

$$u_n = (-1)^n(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = (-1)^n \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$  est positif, décroissant et tend vers 0, d'après le TSSA la série converge.

6. On pose

$$V_N = \sum_{n=0}^N \sin(n) = \sum_{n=0}^N \text{Im}(e^{in}) = \text{Im}\left(\sum_{n=0}^N e^{in}\right)$$

Normalement il faudrait prendre la somme à partir de  $n = 1$  car  $u_0$  n'est pas défini, mais cela ne change rien au fond.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N e^{in} &= \sum_{n=0}^N (e^i)^n = \frac{1 - e^{i(N+1)}}{1 - e^i} = \frac{e^{\frac{i(N+1)}{2}} \left( e^{-\frac{i(N+1)}{2}} - e^{\frac{i(N+1)}{2}} \right)}{e^{\frac{i}{2}} \left( e^{-\frac{i}{2}} - e^{\frac{i}{2}} \right)} = e^{\frac{iN}{2}} \times \frac{-2i \sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{-2i \sin\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= e^{\frac{iN}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

Donc

$$\left| \sum_{n=0}^N e^{in} \right| = \left| \frac{\sin\left(\frac{N+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Et

$$|V_N| = \left| \text{Im}\left(\sum_{n=0}^N e^{in}\right) \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N e^{in} \right| \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Les sommes partielles sont bornées et la suite  $\frac{1}{n}$  est décroissante et tend vers 0. Cela montre que la série de terme général  $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$  converge.

7. Tentons de faire un développement limité en  $\frac{1}{n^\alpha}$  avec  $\alpha > 1$  donc à l'ordre 2 ou 3/2, dans le premier terme on va perdre un ordre à cause du  $n$  devant le  $\ln$  et dans la cos la variable sera  $1/\sqrt{n}$

$$\begin{aligned} u_n &= n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - \left(1 - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4}{4!} + o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^4\right)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{7}{24n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{7}{24n^2} \end{aligned}$$

Il s'agit du terme général d'une série de Riemann convergente avec  $\alpha = 2 > 1$  donc la série de terme général  $u_n$  converge.

Allez à : **Exercice 11**

Correction exercice 12.

On pose  $v_n = \frac{1}{n!}$ , il s'agit d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n v_{n-k} v_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n-k)! k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

Comme on le verra dans le chapitre « séries entières »

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$$

Ce qui montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = e^2$$

Allez à : **Exercice 12**

Correction exercice 13.

On pose

$$a_n = \frac{1}{n!} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$$

$a_n$  est le terme général d'une série absolument convergente en appliquant la règle de D'Alembert

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 < 1$$

$|b_n| = \frac{1}{2^n}$  est le terme général d'une série géométrique convergente avec  $q = \frac{1}{2} < 1$ , donc la série de terme général  $b_n$  converge absolument

On peut appliquer la formule du produit de deux séries absolument convergentes

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n b_{n-k} a_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{k! 2^{n-k}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = e$$

Comme on le verra dans le chapitre « séries entières » et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \frac{2e}{3}$$

Allez à : **Exercice 13**

Correction exercice 14.

1.  $u_n \sim \frac{1}{n^2}$  qui est une suite de Riemann convergente car  $\alpha = 2 > 1$  donc la série de terme général  $u_n$  converge.

On décompose cette fraction en élément simple

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'}$$

En posant  $k' = k + 1$  dans la seconde somme.  $k = 1 \Rightarrow k' = 2$  et  $k = n \Rightarrow k' = n + 1$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}$$

En changeant  $k'$  en  $k$ .

$$\sum_{k=1}^n u_k = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Allez à : **Exercice 14**

Car tous les termes entre  $k = 2$  et  $k = n$  se simplifient.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = 1$$

2.  $u_n \sim \frac{1}{n^3}$  qui est une suite de Riemann convergente car  $\alpha = 3 > 1$  donc la série de terme général  $u_n$  converge.

On décompose cette fraction en élément simple

$$u_n = \frac{1}{2} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{n+2}$$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2}$$

Dans la seconde somme on pose  $k' = k + 1$ ,  $k = 1 \Rightarrow k' = 2$  et  $k = n \Rightarrow k' = n + 1$

Dans la troisième somme on pose  $k'' = k + 2$ ,  $k = 1 \Rightarrow k'' = 3$  et  $k = n \Rightarrow k'' = n + 3$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k'=2}^{n+1} \frac{1}{k'} + \frac{1}{2} \sum_{k''=3}^{n+2} \frac{1}{k''}$$

On change  $k'$  en  $k$  et  $k''$  en  $k$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k}$$

On va réunir les valeurs de  $k$  comprises entre  $k = 3$  et  $k = n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \right) - \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n u_k &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ \sum_{k=1}^{+\infty} u_k &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 14**

3.  $u_n \sim \frac{1}{n^2}$  qui est une suite de Riemann convergente car  $\alpha = 2 > 1$  donc la série de terme général  $u_n$  converge.

On décompose cette fraction en élément simple

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{2n-1}{n(n-2)(n+2)} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{-5}{8} \\ \sum_{k=3}^n u_k &= \sum_{k=3}^n \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{-5}{8} \right) = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{3}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k-2} - \frac{5}{8} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

Dans la seconde somme on pose  $k' = k - 2$ ,  $k = 3 \Rightarrow k' = 1$  et  $k = n \Rightarrow k' = n - 2$

Dans la troisième somme on pose  $k'' = k + 2$ ,  $k = 3 \Rightarrow k'' = 5$  et  $k = n \Rightarrow k'' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{3}{8} \sum_{k'=1}^{n-2} \frac{1}{k'} - \frac{5}{8} \sum_{k''=5}^{n+2} \frac{1}{k''}$$

On change  $k'$  en  $k$  et  $k''$  en  $k$

$$\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{4} \sum_{k=3}^n \frac{1}{k} + \frac{3}{8} \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=5}^{n+2} \frac{1}{k}$$

On va réunir les valeurs de  $k$  comprises entre  $k = 5$  et  $k = n - 2$

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^n u_k &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) + \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &\quad - \frac{5}{8} \left( \sum_{k=5}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) + \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \frac{5}{8} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{3}{8} \sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} - \frac{5}{8} \sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Les trois dernières sommes s'annulent et il reste

$$\sum_{k=3}^n u_k = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) + \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) - \frac{5}{8} \left( \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\sum_{k=3}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{8} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{7}{48} + \frac{25}{32} = \frac{89}{96}$$

Allez à : **Exercice 14**

4. Il est à peu près clair que  $u_n$  tend vers 0, c'est déjà cela, mais comment, on va faire un développement limité en  $\frac{1}{n}$  de  $|u_n| = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$  (car  $\frac{n+1}{n-1} > 1$ ), on pose  $x = \frac{1}{n}$  donc  $n = \frac{1}{x}$

On fait un développement limité à l'ordre 2 car la série de Riemann  $\frac{1}{n}$  est divergente et que la série de Riemann  $\frac{1}{n^2}$  est convergente (En général il faut aller à un ordre strictement supérieur à 1, dans les cas raisonnables).

$$|u_n| = \ln\left(\frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= 2x + o(x^2) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}$$

Et voilà, c'est raté la série de terme général  $u_n$  ne converge pas absolument, on va essayer de montrer qu'elle converge simplement en utilisant le fait que cette série est alternée.

$$v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = f(n) \quad \text{avec} \quad f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(x+1) - \ln(x-1), x \geq 2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1-(x+1)}{x^2-1} = -\frac{2}{x^2-1} < 0$$

De plus

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = 0$$

Donc la série de terme général  $u_n = (-1)^n v_n$  est convergente.

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k=2}^n (-1)^k (\ln(k+1) - \ln(k-1))$$

$$= \sum_{k=2}^n (-1)^k \ln(k+1) - \sum_{k=2}^n (-1)^k \ln(k-1)$$

Dans la première somme on pose  $k' = k+1$ ,  $k=2 \Rightarrow k'=3$  et  $k=n \Rightarrow k'=n+1$

Dans la seconde somme on pose  $k'' = k-1$ ,  $k=2 \Rightarrow k''=1$  et  $k=n \Rightarrow k''=n-1$

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k'=3}^{n+1} (-1)^{k'-1} \ln(k') - \sum_{k''=1}^{n-1} (-1)^{k''+1} \ln(k'')$$

On remarque que  $(-1)^{k''+1} = (-1)^{k''-1}(-1)^2 = (-1)^{k''-1}$ , puis on remplace  $k'$  et  $k''$  par  $k$  dans chacune des sommes

$$\sum_{k=2}^n (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \sum_{k=3}^{n+1} (-1)^{k-1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \ln(k)$$

$$= \sum_{k=3}^{n-1} (-1)^{k-1} \ln(k) + (-1)^{n-1} \ln(n) + (-1)^{(n+1)-1} \ln(n+1)$$

$$- \left( (-1)^{1-1} \ln(1) + (-1)^{2-1} \ln(2) + \sum_{k=3}^{n-1} (-1)^{k-1} \ln(k) \right)$$

Les deux sommes se simplifient

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) &= \sum_{k=3}^{n+1} (-1)^{k-1} \ln(k) - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \ln(k) \\ &= (-1)^{n-1} \ln(n) + (-1)^n \ln(n+1) + \ln(2) = (-1)^{n-1} (\ln(n) - \ln(n+1)) + \ln(2) \\ &= (-1)^{n-1} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(2) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^n (-1)^k \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( (-1)^{n-1} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(2) \right) = \ln(2)$$

Allez à : **Exercice 14**

5.  $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \sim -\frac{1}{(n+2)^2} \sim -\frac{1}{n^2}$ , il s'agit d'une suite de Riemann avec  $\alpha = 2 > 1$ , la série converge.

Petit calcul

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{(k+2)^2} &= \frac{(k+2)^2 - 1}{(k+2)^2} = \frac{(k+2-1)(k+2+1)}{(k+2)^2} = \frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2} \\ \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{(k+3)(k+1)}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=1}^n \ln(k+3) + \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - 2 \sum_{k=1}^n \ln(k+2) \end{aligned}$$

Dans la première somme on pose  $k' = k + 3$ ,  $k = 1 \Rightarrow k' = 4$ ,  $k = n \Rightarrow k' = n + 3$

Dans la deuxième somme on pose  $k'' = k + 1$ ,  $k = 1 \Rightarrow k'' = 2$ ,  $k = n \Rightarrow k'' = n + 1$

Dans la troisième somme on pose  $k''' = k + 2$ ,  $k = 1 \Rightarrow k''' = 3$ ,  $k = n \Rightarrow k''' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k'=4}^{n+3} \ln(k') + \sum_{k''=2}^{n+1} \ln(k'') - 2 \sum_{k'''=3}^{n+2} \ln(k''')$$

On remplace  $k', k''$  et  $k'''$  par  $k$

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \sum_{k=4}^{n+3} \ln(k) + \sum_{k=2}^{n+1} \ln(k) - 2 \sum_{k=3}^{n+2} \ln(k)$$

On va réunir les sommes entre  $k = 4$  et  $k = n + 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) &= \left( \sum_{k=4}^{n+1} \ln(k) + \ln(n+2) + \ln(n+3) \right) + \left( \ln(2) + \ln(3) + \sum_{k=4}^{n+1} \ln(k) \right) \\ &\quad - 2 \left( \ln(3) + \sum_{k=4}^{n+1} \ln(k) + \ln(n+1) \right) \end{aligned}$$

Les sommes de  $\ln(k)$  de  $k = 4$  à  $k = n + 1$  s'éliminent.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) &= (\ln(n+2) + \ln(n+3)) + (\ln(2) + \ln(3)) - 2(\ln(3) + \ln(n+1)) \\ &= \ln\left(\frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2}\right) + \ln(2) - \ln(3) \\ &\quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)(n+3)}{(n+1)^2} = 1 \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{1}{(k+2)^2}\right) = \ln(2) - \ln(3) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

Allez à : **Exercice 14**

Correction exercice 15.

$$\sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n (av_k + bv_{k+1} + cv_{k+2}) = a \sum_{k=0}^n v_k + b \sum_{k=0}^n v_{k+1} + c \sum_{k=0}^n v_{k+2}$$

Dans la deuxième somme on pose  $k' = k + 1$ ,  $k = 0 \Rightarrow k' = 1$  et  $k = n \Rightarrow k' = n + 1$

Dans la troisième somme on pose  $k'' = k + 2$ ,  $k = 0 \Rightarrow k'' = 2$  et  $k = n \Rightarrow k'' = n + 2$

$$\sum_{k=0}^n u_k = a \sum_{k=0}^n v_k + b \sum_{k'=1}^{n+1} v_{k'} + c \sum_{k''=2}^{n+2} v_{k''}$$

On change  $k'$  et  $k''$  par  $k$ .

$$\sum_{k=0}^n u_k = a \sum_{k=0}^n v_k + b \sum_{k=1}^{n+1} v_k + c \sum_{k=2}^{n+2} v_k$$

On réunit les sommes entre  $k = 2$  et  $k = n$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= a \left( v_0 + v_1 + \sum_{k=2}^n v_k \right) + b \left( v_1 + \sum_{k=2}^n v_k + v_{n+1} \right) + c \left( \sum_{k=2}^n v_k + v_{n+1} + v_{n+2} \right) \\ &= a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2}) + (a + b + c) \sum_{k=2}^n v_k \\ &= a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2}) \end{aligned}$$

Car  $a + b + c = 0$

La suite tend vers 0 donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a(v_0 + v_1) + bv_1 + bv_{n+1} + c(v_{n+1} + v_{n+2})) = a(v_0 + v_1) + bv_1$$

Allez à : **Exercice 15**

Correction exercice 16.

1. On va d'abord diviser  $n^3 + 1$  par  $n^2 + 1$ , ce qui donne  $n^3 + 1 = (n^2 + 1)n + (-n + 1)$ , donc

$$\frac{n^3 + 1}{n^2 + 1} = n + \frac{-n + 1}{n^2 + 1}$$

Et alors

$$u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right) = \sin\left(n\pi + \frac{-n + 1}{n^2 + 1}\pi\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{-n + 1}{n^2 + 1}\pi\right)$$

On va montrer que la série est alternée, mais comme  $-n + 1 < 0$ , le sinus va être négatif aussi, on va légèrement modifier  $u_n$

$$u_n = \sin\left(\pi \frac{n^3 + 1}{n^2 + 1}\right) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n - 1}{n^2 + 1}\pi\right)$$

Puis on va montrer que  $v_n = \sin\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right)$  est décroissante et qu'elle tend vers 0

$\frac{n-1}{n^2+1}$  tend vers 0, donc  $v_n$  tend vers  $\sin(0) = 0$ .

Avant de montrer que la suite est décroissante on va montrer que  $\frac{n-1}{n^2+1}\pi \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\frac{n-1}{n^2+1}\pi > 0$  c'est clair

$$\frac{\pi}{2} - \frac{n-1}{n^2+1}\pi = \left(\frac{1}{2} - \frac{n-1}{n^2+1}\right)\pi = \frac{n^2 + 1 - 2(n-1)\pi}{2(n^2+1)} = \frac{n^2 - 2n + 3}{2(n^2+1)} = \frac{(n-1)(n-3)}{2(n^2+1)} > 0$$

Pour  $n > 3$  ( $n$  tend vers l'infini donc on n'a pas de problème pour les petites valeurs de  $n$ )

$$v_n = \sin\left(\frac{n-1}{n^2+1}\pi\right) = f(n) \quad \text{avec} \quad f(x) = \sin\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)' \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right) = \pi \frac{1 \times (x^2+1) - (x-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$

$$= \pi \frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right)$$

Au moins pour  $x$  assez grand,  $-x^2+2x+1 < 0$  et pour  $x$  assez grand (que 3)  $\frac{x-1}{x^2+1}\pi \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  donc  $\cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\pi\right) > 0$ , la fonction est décroissante donc la suite est décroissante. Finalement il s'agit d'une série alternée convergente.

2.

$$u_n = \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) (\ln(n))^{2011} = \left(1 - \left(1 - \frac{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) (\ln(n))^{2011}$$

$$= \left(\frac{\pi^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) (\ln(n))^{2011} \sim \frac{\pi^2}{2n^2} (\ln(n))^{2011}$$

$$n^{\frac{3}{2}} \frac{\pi^2}{2n^2} (\ln(n))^{2011} = \frac{\pi^2}{2n^{\frac{1}{2}}} (\ln(n))^{2011} \rightarrow 0$$

D'après la règle de Riemann la série de terme général  $u_n$  converge.

3. On rappelle que pour tout  $x \geq 0$ ,  $\sin(x) \leq x$

$$0 \leq u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{\sin(x)} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{n}} \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{2\pi^{\frac{3}{2}}}{3} \times \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$  est le terme général d'une série de Riemann convergente, avec  $\alpha = \frac{3}{2} > 1$ . Donc la série de terme général  $u_n$  converge.

4.  $u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{1+n}$  n'est pas de signe constant mais il paraît délicat d'appliquer le TSSA

$$u_n = \frac{1 + (-1)^n\sqrt{n}}{1+n} = \frac{1}{1+n} + (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$$

$\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$  est le terme général d'une série de Riemann avec  $\alpha = 1 \leq 1$ , donc divergente.

Posons  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ , on a alors  $f(n) = \frac{\sqrt{n}}{1+n}$   
 $f(n) > 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0$

C'est évident. Et pour tout  $x > 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x) - \sqrt{x}}{(1+x)^2} = \frac{(1+x) - 2x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2} < 0$$

Ce qui montre que la suite  $\left(\frac{\sqrt{n}}{1+n}\right)$  est décroissante, d'après le TSSA la série de terme général  $(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$  converge.

$u_n$  est la somme du terme général d'une série divergente  $\left(\frac{1}{n+1}\right)$  et du terme général d'une série convergente  $(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{1+n}$ , donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

5. D'après la règle de Cauchy

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{(\ln(n))^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln(n)} \rightarrow 0 < 1$$

Donc la série de terme général  $u_n$  converge.

6. Cela va dépendre de la valeur de  $\alpha$

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} = \left( \frac{2^n}{n^2} (\sin(\alpha))^{2n} \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2 \sin^2(\alpha)}{n^{\frac{2}{n}}}$$

$$n^{\frac{2}{n}} = e^{\frac{2}{n} \ln(n)} \rightarrow e^0 = 1$$

Donc

$$(u_n)^{\frac{1}{n}} \rightarrow 2 \sin^2(\alpha)$$

D'après la règle de Cauchy

Si  $2 \sin^2(\alpha) < 1$ , autrement dit si  $\sin^2(\alpha) < \frac{1}{2}$ , soit encore  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , c'est-à-dire si  $\alpha \in \left] -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $\alpha \in \left] \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \right[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Cela se voit assez facilement sur le cercle trigonométrique.

La série de terme général  $u_n$  converge

Si  $2 \sin^2(\alpha) > 1$ , autrement dit si  $\sin^2(\alpha) > \frac{1}{2}$ , soit encore  $-1 \leq \sin(\alpha) < -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ou  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin(\alpha) \leq 1$ , c'est-à-dire si  $\alpha \in \left] \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  ou  $\alpha \in \left] \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right[$  avec  $k \in \mathbb{Z}$

La série de terme général  $u_n$  diverge.

Si  $2 \sin^2(\alpha) = 1$  on ne peut pas conclure avec la règle de Cauchy, mais alors

$$u_n = \frac{2^n}{n^2} (\sin(\alpha))^{2n} = \frac{(2 \sin^2(\alpha))^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$$

Qui est le terme général d'une série de Riemann convergente avec  $\alpha = 2 > 1$

Allez à : **Exercice 16**

Correction exercice 17.

1.

a. La suite  $u_n$  n'est pas forcément positive mais à partir d'un certain rang  $0 < \frac{a}{k} < \pi$  donc les termes  $\sin\left(\frac{a}{k}\right)$  sont positifs donc  $u_n$  ne change plus de signe lorsque que  $n$  augmente. Elle est de signe constant.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)! \prod_{k=1}^{n+1} \sin\left(\frac{a}{k}\right)}{n! \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{a}{k}\right)} = (n+1) \sin\left(\frac{a}{n+1}\right) \sim (n+1) \times \frac{a}{n+1} = a$$

D'après la règle de D'Alembert si  $a < 1$  alors la série converge et si  $a > 1$  la série diverge.

b. Si la série converge alors la suite tend vers 0.

2.

a.  $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$  donc  $a_n$  tend vers 0, on va faire un développement limité de  $a_n$  en  $\frac{1}{n}$  à l'ordre 2.

Attention en multipliant par  $n$  on va perdre un ordre. Remarque  $\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$  donc  $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) < 1$  et la suite  $a_n$  est négatif (donc de signe constant).

$$a_n = \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\sim -\frac{1}{6n^2}$$

$-\frac{1}{6n^2}$  est le terme général d'une série de Riemann convergente ( $\alpha = 2 > 1$ ). Donc la série de terme général  $a_n$  converge.

b. Pour  $a = 1$

$$u_n = n! \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=1}^n k \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

Donc

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^n k \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(k \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^n a_k$$

La série de terme général  $a_n$  converge, donc la suite  $(u_n)$  converge.

Allez à : **Exercice 17**

Correction exercice 18.

1. Dans un premier temps remarquons que pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n > 0$ , on en déduit que

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{n}$$

Cela montre que la suite  $(u_n)$  tend vers 0 mais cela ne suffit pas pour montrer que la série est convergente (si on avait pu montrer que  $0 < u_{n+1} < \frac{1}{n^2}$  là cela aurait été bon).

Dans un deuxième temps on va faire un développement limité en «  $u_n$  »

$$u_{n+1} = \frac{1}{n} (1 - u_n + o(u_n)) = \frac{1}{n} - \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

$\frac{1}{n}$  est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général  $u_n$  diverge.

2.

$$(-1)^{n+1} u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} - (-1)^{n+1} \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)$$

$\frac{(-1)^{n+1}}{n}$  est une série alternée,  $\frac{1}{n}$  tend vers 0 en décroissant, c'est le terme général d'une série de Riemann.

$$\left| (-1)^{n+1} \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right) \right| \sim \frac{u_n}{n}$$

Et  $0 < \frac{u_n}{n} < \frac{1}{n(n-1)} \sim \frac{1}{n^2}$  par conséquent  $(-1)^{n+1} \frac{u_n}{n} + o\left(\frac{u_n}{n}\right)$  est le terme général d'une série

absolument convergente, c'est donc le terme général d'une série convergente et enfin  $(-1)^{n+1} u_{n+1}$  est le terme général d'une série convergente. (il en est de même pour  $(-1)^n u_n$  évidemment).

Allez à : **Exercice 18**

Correction exercice 19.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1+\frac{1}{2}}}}{\frac{e^n n!}{n^{n+\frac{1}{2}}}} = \frac{e^{n+1}(n+1)! n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n! (n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{e^1 (n+1) n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}(n+1)} = \frac{e n^{n+\frac{1}{2}}}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= e \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}} = e e^{(n+\frac{1}{2}) \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)} = e e^{-(n+\frac{1}{2}) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e e^{-(n+\frac{1}{2}) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Le but est de faire un développement limité de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  en  $\frac{1}{n}$  à l'ordre 2.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= e e^{-(n+\frac{1}{2}) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e e^{-\left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = e e^{-1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = 1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$z_n = \ln\left(1 + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{12n^2}$$

$\frac{1}{12n^2}$  est le terme général d'une série de Riemann convergente donc  $z_n$  est le terme général d'une série convergente.

D'autre part

$$\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \sum_{k=1}^n \ln(u_{k+1}) - \sum_{k=1}^n \ln(u_k)$$

Dans la première somme on pose  $k' = k + 1$ ,  $k = 1 \Rightarrow k' = 2$  et  $k = n \Rightarrow k' = n + 2$

$$\sum_{k=1}^n z_k = \sum_{k'=2}^{n+1} \ln(u_{k'}) - \sum_{k=1}^n \ln(u_k)$$

On change  $k'$  en  $k$  dans la première somme et on simplifie

$$\sum_{k=1}^n z_k = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_1)$$

$$\ln(u_{n+1}) = \sum_{k=1}^n z_k + \ln(u_1)$$

La série de terme général  $z_k$  converge donc  $\ln(u_{n+1})$  converge et finalement  $u_{n+1}$  admet une limite finie.

Allez à : **Exercice 19**

Correction exercice 20.

Commençons par une mauvaise nouvelle, si  $u_n$  et  $v_n$  sont les termes généraux de séries absolument convergente alors  $w_n$  est le terme général de la série produit, qui est convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Seulement voilà la série de terme général  $v_n$  ne converge pas absolument alors il faut faire autrement.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N w_n &= \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right) = \sum_{n=0}^N \left( \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \frac{(-1)^{n-k}}{n-k+1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} \right) \end{aligned}$$

Puis on va décomposer la fraction rationnelle  $\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)}$  en éléments simples, il existe  $a, b$  et  $c$  (ces trois constantes peuvent dépendre de  $n$ ) tels que :

$$\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} = \frac{a}{(k+1)^2} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{n-k+1}$$

Je multiplie par  $(k+1)^2$ , puis  $k = -1$

$$a = \left[ \frac{1}{n-k+1} \right]_{k=-1} = \frac{1}{n+2}$$

Je multiplie par  $n-k+1$ , puis  $k = n+1$

$$c = \left[ \frac{1}{(k+1)^2} \right]_{k=n+1} = \frac{1}{(n+2)^2}$$

Je multiplie par  $k$ , puis  $k \rightarrow +\infty$

$$0 = b - c \Rightarrow b = \frac{1}{(n+2)^2}$$

Finalement on a

$$\frac{1}{(k+1)^2(n-k+1)} = \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{n-k+1}$$

Ce que l'on remplace dans la somme partielle

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N w_n &= \sum_{n=0}^N \left( (-1)^n \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1} \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( (-1)^n \left( \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \right) \right) \end{aligned}$$

Puis on va faire le changement d'indice  $k' = n - k$  dans la somme

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} \\ &k=0 \Rightarrow k' = n \quad \text{et} \quad k=n \Rightarrow k' = 0 \\ &\sum_{k=0}^n \frac{1}{n-k+1} = \sum_{k'=0}^n \frac{1}{k'+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

Ce que l'on remplace dans la somme partielle

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N w_n &= \sum_{n=0}^N \left( (-1)^n \left( \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( (-1)^n \left( \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{2}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^N \left( \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \right) + 2 \sum_{n=0}^N \left( \frac{(-1)^n}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \right) = S_{1,N} + S_{2,N} \end{aligned}$$

Où  $w_{1,n} = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$  est le terme général de la série  $S_1$  et  $w_{2,n} = \frac{(-1)^n}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}$  le terme général de la série  $S_2$ .

On rappelle un résultat « connu »,

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sim \ln(n)$$

Alors

$$n^{\frac{3}{2}} |w_{2,n}| = n^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(n+2)^2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sim \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

D'après les règles de Riemann la série de terme général converge absolument, donc  $S_{1,N}$  admet une limite finie lorsque  $N$  tend vers l'infini.

Pour la série  $S_1$  cela va être moins simple  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$  est une somme partielle qui admet une limite puisque que le terme général est équivalent à  $\frac{1}{k^2}$  qui est le terme général d'une série de Riemann convergente, mais le terme  $\frac{(-1)^n}{n+2}$  ne permet pas d'espérer une convergence absolue, reste la solution de montrer qu'il s'agit d'une série alternée, il faut montrer que

$$a_n = \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$$

Tend vers 0 et est décroissant,  $a_n \rightarrow 0$  c'est évident.

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{n+3} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \frac{(n+2) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)^2} - (n+3) \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}}{(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

Donc  $a_{n+1} - a_n$  a le même signe que

$$(n+2) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k+1)^2} - (n+3) \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$$

$$= (n+2) \left( \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} \right) - (n+3) \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{1}{n+2} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2}$$

Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $k+1 < n+1$ , donc

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} > \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{1}{(n+1)^2} \times (n+1) = \frac{1}{n+1}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{n+2} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} < \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1 - (n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$$

Ce qui montre bien que  $a_{n+1} - a_n < 0$  c'est-à-dire que la suite est décroissante.

Par conséquent

$$w_{1,n} = \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)^2} = (-1)^n a_n$$

Est le terme général d'une série convergente et enfin la série de terme général  $w_n$  est la somme de deux série convergente, elle converge.

Allez à : **Exercice 20**

Correction exercice 21.

$\frac{1}{\sqrt{n}}$  est décroissant et tend vers 0 donc la série de terme général  $u_n$  est une série convergente.

$\frac{1}{n}$  est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général  $v_n$  est la somme d'une série convergente et d'une série divergente, elle diverge.

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n n} = 1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \rightarrow 1$$

Ce qui montre que ces deux suites sont équivalentes.

Remarque :

Si  $u_n \sim v_n$  alors les séries de terme général  $u_n$  et de terme général  $v_n$  sont de même nature est un résultat faux, pour qu'il soit vrai, il faut que  $u_n$  et  $v_n$  soient de signes constants.

Allez à : **Exercice 21**

Correction exercice 22.

1.  $\forall x \in [0,1], x^n e^{-x} > 0$  donc  $f(n) > 0$

$$\forall x \in [0,1], 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n$$

Donc

$$\int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

Autrement dit  $f(n+1) \leq f(n)$ , cette suite est décroissante.

$$f(n) = \int_0^1 x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 n x^{n-1} (-e^{-x}) dx = -\frac{1}{e} + n f(n-1)$$

Montrons par récurrence que

$$f(n) = \frac{n!}{e} \left( e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

Pour  $n = 0$

$$\int_0^1 x^0 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} + 1$$
$$\frac{0!}{e} \left( e - \sum_{k=0}^0 \frac{1}{k!} \right) = \frac{1}{e} (e - 1) = 1 - \frac{1}{e}$$

L'hypothèse est vérifiée au rang 0.

Supposons

$$f(n-1) = \frac{(n-1)!}{e} \left( e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right)$$

Alors

$$f(n) = -\frac{1}{e} + n f(n-1) = -\frac{1}{e} + n \frac{(n-1)!}{e} \left( e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) = -\frac{1}{e} + \frac{n!}{e} \left( e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right)$$
$$= \frac{n!}{e} \times \left( -\frac{1}{n!} \right) + \frac{n!}{e} \left( e - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \right) = \frac{n!}{e} \left( e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)$$

Ce qui achève la récurrence

2. Pour tout  $x \in [0,1]$ ,  $e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{-0}$ , on en déduit que :

$$\frac{1}{e} \times x^n \leq x^n e^{-x} \leq x^n$$

Puis en intégrant en 0 et 1

$$\frac{1}{e} \int_0^1 x^n dx \leq f(n) \leq \int_0^1 x^n dx$$

Comme

$$\int_0^1 x^n dx = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

Cela donne

$$\frac{1}{e(n+1)} \leq f(n) \leq \frac{1}{n+1}$$

$f(n)$  est minorée par  $\frac{1}{e(n+1)} \sim \frac{1}{en}$  qui est le terme général d'une série de Riemann divergente donc la série de terme général  $f(n)$  diverge.

$$\frac{1}{en(n+1)} \leq \frac{f(n)}{n} \leq \frac{1}{n(n+1)}$$

$\frac{f(n)}{n}$  est majorée par  $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$  qui est le terme général d'une série de Riemann convergente donc la série de terme général  $\frac{f(n)}{n}$  converge.

$f(n)$  est positive et décroissante, la série de terme général  $(-1)^n f(n)$  est une série alternée convergente.

3. Soit  $R$  le rayon de convergence de la série entière. Comme la série de terme général  $f(n)$  diverge cela signifie que 1 n'est pas dans le disque de convergence sinon

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) 1^n$$

Convergerait, cela entraîne que  $R \geq 1$

Comme la série de terme général  $(-1)^n f(n)$  converge, cela signifie que  $-1$  est dans le disque de convergence donc  $R \leq 1$ , en effet

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)(-1)^n < +\infty$$

Allez à : **Exercice 22**

Correction exercice 23.

1. On a  $0 < \sin(u) < u$  pour  $u > 0$  donc

$$0 < n \sin\left(\frac{1}{n}\right) < n \times \frac{1}{n} = 1$$

Par conséquent

$$\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a} > \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b} > 0$$

Puisque  $n^b > n^a$

Cela montre que le terme général  $\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^b}$  est majoré par le terme général d'une série convergente, cette série converge.

2.

$$\ln(u_n) = \ln\left(\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^a}\right) = n^a \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

Il faut faire le développement limité de  $\sin\left(\frac{1}{n}\right)$  à un ordre suffisant parce que l'on va d'abord multiplier par  $n$  puis par  $n^a$  et à la fin on veut un développement limité à un ordre strictement supérieur à 2.

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= n^a \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^a \ln\left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = n^a \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= n^a \left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{1}{6n^{2-a}} + o\left(\frac{1}{n^{3-a}}\right) \end{aligned}$$

Comme  $a \leq 2$ ,  $2 - a \geq 0$ , ce qui montre que  $\ln(u_n)$  tend vers 0, et que donc  $u_n$  tend vers  $1 \neq 0$ , la série ne converge pas.

3.

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= n^{2+\epsilon} \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = n^{2+\epsilon} \ln\left(n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = n^{2+\epsilon} \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ &= n^{2+\epsilon} \left(-\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = -\frac{n^\epsilon}{6} + o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right) \\ u_n &= \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6} + o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) = \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right) \exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \end{aligned}$$

$1 - \epsilon > 0$  donc  $\frac{1}{n^{1-\epsilon}} \rightarrow 0$  et alors  $\exp\left(o\left(\frac{1}{n^{1-\epsilon}}\right)\right) \rightarrow 1$ , ce qui montre que

$$u_n \sim \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right)$$

En utilisant les règles de Riemann avec  $\alpha = 2 > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \exp\left(-\frac{n^\epsilon}{6}\right) = 0$$

Ce qui montre que la série de terme général  $u_n$  converge.

4. On vient de montrer que la série de terme général  $u_n$  était convergente si  $2 < a < 3$  et à la première question on a montré que si la série convergeait pour  $a$  alors elle convergeait pour  $b > a$ , elle converge donc pour tout  $a > 2$ .

Allez à : **Exercice 23**

Correction exercice 24.

1.

a)

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = [\arctan(x)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

b)  $x^2 + 1 \geq 1$  donc

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq \frac{x^{2n}}{1} = x^{2n}$$

Puis en intégrant entre 0 et 1

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx = \left[ \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1}$$

2.

a)

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{x^{2(n+1)}}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+2} + x^{2n}}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)x^{2n}}{1+x^2} dx = \int_0^1 x^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

b)

$$\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^k (u_{k+1} + u_k) = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_{k+1} + \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$

Dans la première somme on pose  $k' = k + 1$ ,  $k = 0 \Rightarrow k' = 1$  et  $k = n \Rightarrow k' = n + 1$

$$\sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k'=1}^{n+1} (-1)^{k'-1} u_{k'} + \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$$

On remplace  $k'$  par  $k$  dans la première somme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n v_k &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} u_k + \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k \\ &= (-1)^{n-1+1} u_{n+1} + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k + (-1)^0 u_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k \\ &= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k + \sum_{k=1}^n (-1)^k u_k \\ &= (-1)^n u_{n+1} + u_0 + \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} u_k = (-1)^n u_{n+1} + \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que  $u_n$  tend vers 0 pour montrer que

$$\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \frac{\pi}{4}$$

Allez à : **Exercice 24**