

Polynômes et fractions rationnelles

Exercice 1.

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P = -X^8 + 2X^4 - 1$

Allez à : [Correction exercice 1](#)

Exercice 2.

Soit $P = 1 - X^8$

Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$ et enfin dans $\mathbb{Q}[X]$

Allez à : [Correction exercice 2](#)

Exercice 3.

Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que $1 + j = -j^2$
2. Montrer que j est une racine multiple de P .
3. Trouver deux racines réelles évidentes de P .
4. Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 3](#)

Exercice 4.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 4](#)

Exercice 5.

Soit $P = X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$

1. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{Q}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 5](#)

Exercice 6.

Déterminer les racines réelles et complexes du polynôme :

$$P(X) = \frac{1}{32}X^5 + \frac{1}{16}X^4 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{2}X + 1$$

En déduire sa factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 6](#)

Exercice 7.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$$

1. Déterminer les racines de P .
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 7](#)

Exercice 8.

1. Soit $P = -X^3 + X^2 - X + 1$ un polynôme.

Factoriser ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit

$$P = 1 - X + X^2 - \dots + (-1)^n X^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k X^k$$

Déterminer les racines réelles et complexes de P .

Allez à : [Correction exercice 8](#)

Exercice 9.

Factoriser sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} le polynôme

$$P(X) = X^6 + X^4 + X^2 + 1$$

Indication : $P(X) = 1 + X^2 + X^4 + X^6$

Allez à : [Correction exercice 9](#)

Exercice 10.

Soit $P = X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$

On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

1. Montrer que j est une racine multiple de P .
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 10](#)

Exercice 11.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$$

1. Montrer que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une racine multiple de P .
2. En remarquant que P est un polynôme pair, donner toutes les racines de P ainsi que leur multiplicité.
3. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 11](#)

Exercice 12.

Soit $P = 2X^3 + 3X^2 + 6X + 1 - 3j$

1. Montrer que j est une racine double de P
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$

Allez à : [Correction exercice 12](#)

Exercice 13.

1. Déterminer les racines réelles et complexes de $(X + 1)^6 - X^6$
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P = (X + 1)^7 - X^7 - a$$

Déterminer a pour que P admette une racine réelle multiple.

Allez à : [Correction exercice 13](#)

Exercice 14.

1. Le polynôme $A = X^4 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?
2. Le polynôme $B = X^3 + 3X + 1$, est-il irréductible dans $\mathbb{R}[X]$?

Allez à : [Correction exercice 14](#)

Exercice 15.

Déterminer les réels a, b et c tels que $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ soit factorisable par
 $Q = (X^2 - 1)(X - 3)$

Allez à : [Correction exercice 15](#)

Exercice 16.

Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $A_n = (X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $B = X^2 - X + 1$

Allez à : [Correction exercice 16](#)

Exercice 17.

Soit

$$P_n = (X + 1)^n - X^n - 1$$

On pose $n \equiv a \pmod{6}$ avec $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Pour quelles valeurs de $n, j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est-il racine de P_n ?

On pourra discuter selon les valeurs de a .

Allez à : [Correction exercice 17](#)

Exercice 18.

Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n$ par $X^2 + 1$.

Allez à : [Correction exercice 18](#)

Exercice 19.

Quel est le reste de la division euclidienne de $P = X^n + X + 1$ par $Q = (X - 1)^2$?

Allez à : [Correction exercice 19](#)

Exercice 20.

Soit $R \in \mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^n$ par $(X - 1)^2$.

Déterminer R .

Allez à : [Correction exercice 20](#)

Exercice 21.

Quel est le reste de la division euclidienne de $A_n = X^n + X + b$ par $B = (X - a)^2$, pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

Allez à : [Correction exercice 21](#)

Exercice 22.

Déterminer le reste dans la division euclidienne de $A = X^{2n} + 2X^n + 1$ par $B = X^2 + 1$

Allez à : [Correction exercice 22](#)

Exercice 23.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^{4n} - 1$ est divisible par $X^4 - 1$.

2. En déduire que le polynôme $P = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d}$ avec a, b, c et d entiers naturels est divisible par $Q = X^3 + X^2 + X + 1$.

Allez à : [Correction exercice 23](#)

Exercice 24.

On pose $P(X) = X^3 - 63X + 162$

Sachant que l'une des racines de ce polynôme est le double d'une autre racine, trouver les trois racines de P .

Indication : On pourra utiliser les relations entre les racines et les coefficients du polynôme.

Allez à : [Correction exercice 24](#)

Exercice 25.

Soit $P = X^3 + pX + q$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, on note α , β et γ ses racines.

1. Calculer $A = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.
2. Calculer $B = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$.
3. Calculer $C = \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \alpha^2\gamma + \alpha\gamma^2 + \beta^2\gamma + \beta\gamma^2$.
4. On pose $D = \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3$
Calculer D en fonction de p .

Allez à : [Correction exercice 25](#)

Exercice 26.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$

1. Montrer que 0 et 1 sont racines de P .
2. Soit a une racine de P . Si $a \neq 0$, montrer que $a-1$ est racine. Si $a \neq 1$, montrer que $a+1$ est racine.
3. On suppose que P n'est pas le polynôme nul. Montrer que 0 et 1 sont les seules racines de P .

Indication :

S'il existe une racine a telle que $\operatorname{Re}(a) < 1$ différente de 0 ($a \neq 0$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

S'il existe une racine a telle que $\operatorname{Re}(a) > 0$ différente de 1 ($a \neq 1$), montrer qu'il y a une infinité de racines.

4. En déduire que P est de la forme $\alpha X^k(X-1)^l$ avec $\alpha \in \mathbb{C}[X]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $l \in \mathbb{N}^*$.
5. Quel est l'ensemble des polynômes de $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $XP(X-1) = (X-2)P(X)$.

Allez à : [Correction exercice 26](#)

Exercice 27.

Effectuer la division suivante les puissances croissantes de $X^4 + X^3 - 2X + 1$ par $X^2 + X + 1$ à l'ordre 2.

Allez à : [Correction exercice 27](#)

Exercice 28.

On considère le couple de polynôme à coefficients réels

$$P = X^3 - X^2 - X - 2 \quad \text{et} \quad Q = X^3 - 1$$

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour calculer le $PGCD(P, Q)$.
2. Décomposer P et Q en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Retrouvez le résultat de la question 1.
4. Décomposer P en facteur irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 28](#)

Exercice 29.

Soient $P = X^5 + X^4 - 6X^3 - X^2 - X + 6$ et $Q = X^4 + 2X^3 - X - 2$

Déterminer le $PGCD$ de P et Q et en déduire les racines communes de P et Q .

Allez à : [Correction exercice 29](#)

Exercice 30.

Déterminer les P.G.C.D. des polynômes

$$A = X^5 + 2X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2 \quad \text{et} \quad B = X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2$$

En utilisant l'algorithme d'Euclide. En déduire les factorisations de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 30](#)

Exercice 31.

Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes $P = (X - 1)^2$ et $Q = X^2 + 1$.

Allez à : [Correction exercice 31](#)

Exercice 32.

1. Déterminer une identité de Bézout entre les polynômes

$$P = 2X^4 + X^3 - 2X - 1 \quad \text{et} \quad Q = 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1$$

2. En déduire les racines communes de P et Q .

Allez à : [Correction exercice 32](#)

Exercice 33.

Soit $P = X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

1. Calculer le PGCD de P et P' .

2. Quelles sont les racines communes à P et P' ?

Quelles sont les racines multiples de P dans \mathbb{C} ?

3. Montrer que $(X^2 + 1)^2$ divise P .

4. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 33](#)

Exercice 34.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on désigne par $P(X + 1)$ le polynôme obtenu en remplaçant X par $X + 1$ dans P .

1. Existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tels que $P(0) = 1$?

2. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré 3, quel est le degré du polynôme $P(X + 1) - P(X)$?

3. Existe-t-il des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré trois qui vérifient :

$$P(X + 1) - P(X) = X^2 - 1 \quad \text{et} \quad P(0) = 1$$

(Indication : On pourra dériver le polynôme P dans l'équation ci-dessus.)

Allez à : [Correction exercice 34](#)

Exercice 35.

Soit n un entier strictement positif.

1. Déterminer le pgcd des polynômes $X^n - 1$ et $(X - 1)^n$.

2. Pour $n = 3$ démontrer qu'il existe un couple de polynômes (U, V) tel que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1$$

Donnez-en un.

Allez à : [Correction exercice 35](#)

Exercice 36.

1. Déterminer le PGCD et une identité de Bézout des polynômes P et Q .

$$P = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1) = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2$$

$$Q = (X^2 + 3X + 2)(X^2 + 1) = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2$$

2. Factoriser P et Q .

Allez à : [Correction exercice 36](#)

Exercice 37.

Soit

$$(X + 1)^2A + (X - 1)^2B = 1 \quad (E)$$

1. Trouver une solution particulière $A_0, B_0 \in \mathbb{R}[X]$ de (E) .

2. En déduire toutes les solutions de (E) .

3. Déterminer tous les polynômes P tels que $P - 1$ soit un multiple de $(X + 1)^2$ et que $P + 1$ soit un multiple de $(X - 1)^2$.

Allez à : [Correction exercice 37](#)

Exercice 38.

Soient P et Q deux polynômes définis par :

$$P(X) = X^6 - X^4 - X^2 + 1 \text{ et } Q(X) = X^4 + 2X^3 - 2X - 1$$

Déterminer le PGCD de P et Q et en déduire les racines communes de P et Q ainsi que leur multiplicité.

Allez à : [Correction exercice 38](#)

Exercice 39.

Quels sont les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que P' divise P .

Allez à : [Correction exercice 39](#)

Exercice 40.

$$\text{Soit } P(X) = 2X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 3X + 2$$

$$\text{On pose } Y = X + \frac{1}{X}$$

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q , de degré 2 tel que $Q(Y) = \frac{P(X)}{X^2}$.
2. Calculer les racines de Q .
3. En déduire les racines de P , puis la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Allez à : [Correction exercice 40](#)

Exercice 41.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on suppose que $\sin(n\theta) \neq 0$.

1. Déterminer toutes les racines du polynôme

$$P = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k$$

2. Montrer que toutes les racines sont réelles.

Allez à : [Correction exercice 41](#)

Exercice 42.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

Allez à : [Correction exercice 42](#)

Exercice 43.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X - 1)(X^2 - 1)}$$

Allez à : [Correction exercice 43](#)

Exercice 44.

Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fractions rationnelles suivantes :

- 1.

$$F(X) = \frac{-X^2 + 2X + 1}{(X - 1)^2(X^2 + 1)}$$

2.

$$G(X) = \frac{X^3}{(X-1)(X+1)}$$

Allez à : [Correction exercice 44](#)

Exercice 45.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{X^4 - 1}$$

1. Dans $\mathbb{R}(X)$
2. Dans $\mathbb{C}(X)$

Allez à : [Correction exercice 45](#)

Exercice 46.

Soit

$$F = \frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}$$

Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$, dans $\mathbb{C}(X)$.Allez à : [Correction exercice 46](#)

Exercice 47.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F = \frac{X^2}{(X^2 + 1)^{2010}}$$

Allez à : [Correction exercice 47](#)

Exercice 48.

Décomposer la fraction rationnelle suivante en éléments simples.

$$F = \frac{X^8 + X + 1}{X^4(X-1)^3}$$

Allez à : [Correction exercice 48](#)

Exercice 49.

Décomposer la fraction suivante en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

$$F = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2}$$

Allez à : [Correction exercice 49](#)

Exercice 50.

Décomposer la fraction rationnelle suivante dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$

$$G = \frac{X^5}{(X^4 - 1)^2}$$

Allez à : [Correction exercice 50](#)

Exercice 51.

1. Soit $F = \frac{P}{Q}$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine simple de Q , montrer que le coefficient de l'élément simple $\frac{1}{X-\alpha}$ est $\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$.

2. Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction

$$F = \frac{X}{X^n - 1}$$

Allez à : [Correction exercice 51](#)

Exercice 52.

On considère le polynôme $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1$

1. Factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$

2. Décomposer la fraction $\frac{X+1}{P}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Allez à : [Correction exercice 52](#)

CORRECTIONS

Correction exercice 1.

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = -(X^8 - 2X^4 + 1) = -(X^4 - 1)^2 = -(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)^2 = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X^2 + 1)^2$$

Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = -(X - 1)^2(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2$$

Allez à : [Exercice 1](#)

Correction exercice 2.

Première méthode

$P(X) = 1 - X^8 = (1 - X^4)(1 + X^4)$, $(1 - X^4)$ se décompose facilement en

$(1 - X)(1 + X)(i - X)(i + X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i)$, mais pour décomposer $1 + X^4$, c'est beaucoup plus délicat, il faut utiliser une bonne ruse, allons-y

$$1 + X^4 = 1 + 2X^2 + X^4 - 2X^2 = (1 + X^2)^2 - (\sqrt{2}X)^2 = (1 + X^2 - \sqrt{2}X)(1 + X^2 + \sqrt{2}X)$$

$1 + X^2 - \sqrt{2}X = X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et $1 + X^2 + \sqrt{2}X = X^2 + \sqrt{2}X + 1$ sont deux polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ car leur discriminant sont négatifs. Donc la décomposition de $P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ il suffit de trouver les racines complexes de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ et $X^2 + \sqrt{2}X + 1$

Le discriminant de $X^2 - \sqrt{2}X + 1$ est $\Delta_1 = (-\sqrt{2})^2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$, ses racines sont $X_1 = \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $X_2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Le discriminant de $X^2 + \sqrt{2}X + 1$ est $\Delta_1 = (\sqrt{2})^2 - 4 = -2 = (i\sqrt{2})^2$, ses racines sont $X_3 = \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2} = e^{-3i\frac{\pi}{4}}$ et $X_4 = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2} = e^{3i\frac{\pi}{4}}$.

$$P(X) = -(X - 1)(1 + X)(X - i)(X + i) \left(X - \frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right) \left(X - \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right) \left(X - \frac{-\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right) \left(X - \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right)$$

Deuxième méthode

On cherche les racines réelles et complexes de $1 - X^8 = 0$

$$X^8 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}} = e^{\frac{ik\pi}{4}} \text{ avec } k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

Ce qui donne $X_0 = 1$, $X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$, $X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$, $X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $X_4 = e^{i\pi} = -1$, $X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}$, $X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$, $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = -(X - 1) \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) (X - i) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) (X + 1) \left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) (X + i) \left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$, on regroupe les conjugués

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X-1)(1+X)(X-i)(X+i) \left(X - e^{-i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X - e^{3i\frac{\pi}{4}}\right) \\ P(X) &= -(X-1)(1+X)(X^2+1) \left(X^2 - \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \left(X^2 - \left(e^{-3i\frac{\pi}{4}} + e^{3i\frac{\pi}{4}}\right)X + e^{-3i\frac{\pi}{4}}e^{3i\frac{\pi}{4}}\right) \\ &= -(X-1)(X+1)(X^2+1) \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right) \left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ &= -(X-1)(X+1)(1+X^2) \left(X^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right) \left(X^2 + 2\frac{\sqrt{2}}{2}X + 1\right) \\ &= -(X-1)(X+1)(1+X^2)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1) \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{Q}[X]$ on regroupe les deux derniers polynômes

$$\begin{aligned} P(X) &= -(X-1)(X+1)(1+X^2)(X^2+1-\sqrt{2}X)(X^2+1+\sqrt{2}X) \\ &= -(X-1)(X+1)(1+X^2) \left((X^2+1)^2 - (\sqrt{2}X)^2\right) \\ &= -(X-1)(X+1)(1+X^2)(X^4+1) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 2**

Correction exercice 3.

1.

$$1+j = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = -j^2$$

Ou mieux

$$1+j+j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0$$

$$\text{Car } j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

2.

$$\begin{aligned} P(j) &= (j+1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^6j - 1 = -j^{14} - j - 1 - j^{12}j^2 - j - 1 = -(j^2 + j + 1) = 0 \\ P'(j) &= 7((j+1)^6 - j^6) = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(j^{12} - 1) = 7(1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Donc j est au moins racine double.

3. $P(0) = (0+1)^7 - 0^7 - 1 = 1^7 - 1 = 0$ et $P(-1) = (-1+1)^7 - (-1)^7 - 1 = 0 - (-1) - 1 = 0$
Donc 0 et -1 sont deux racines évidentes.

4. Le début de la formule du binôme de $(X+1)^7$ est $X^7 + 7X^6$ (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc P est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.

D'autre part, j est racine double (au moins) donc $\bar{j} = j^2$ est aussi racine double (au moins) car P est un polynôme à coefficients réels. 0 et -1 sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme $d^\circ P = 6$ on a toutes les racines. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-\bar{j})^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X-j)(X-\bar{j}) = (X-j)(X-j^2) = X^2 - (j+j^2)X + j^3 = X^2 + X + 1$$

Donc

$$P = 7X(X+1) \left((X-j)(X-\bar{j})\right)^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

Allez à : **Exercice 3**

Correction exercice 4.

$$P(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - X^6 \\ 1 - X \\ X \neq 1 \end{cases} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - X^6 = 0 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^6 = 1 \\ X \neq 1 \end{cases}$$

Or $X^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{2ik\pi}{6}} = e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$

Ce qui donne $X_0 = 1, X_1 = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j = -j^2, X_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j, X_3 = e^{i\pi} = -1, X_4 = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2, X_5 = e^{\frac{5i\pi}{3}} = -j$
 Les 5 racines de P sont $X_1 = -j^2, X_2 = j, X_3 = -1, X_4 = j^2$ et $X_5 = -j$.

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = 1 \times (X + j^2)(X - j)(X + 1)(X - j^2)(X + j) = (X + j^2)(X - j)(X + 1)(X - j^2)(X + j)$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P(X) = (X + 1)(X - j)(X - j^2)(X + j^2)(X + j) = (X + 1)(X^2 - (j + j^2)X + j^3)(X^2 + (j + j^2)X + j^3) \\ = (X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)$$

Allez à : **Exercice 4**

Correction exercice 5.

1.

$$P = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + X^6 + X^7 = \frac{1 - X^8}{1 - X}$$

Pour $X \neq 1$

Les racines de P vérifient $\begin{cases} X^8 = 1 \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_k = e^{\frac{2ik\pi}{8}}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow X_k = e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in$

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}, X_2 = e^{\frac{i\pi}{2}} = i, X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}, X_4 = e^{i\pi} = -1, X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}, X_6 = e^{\frac{3i\pi}{2}} = -i$ et $X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$

Donc

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)(X - i)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + 1)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)(X + i)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)$$

2. On rappelle que

$$(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}) = X^2 - 2\cos(\theta) + 1 \\ P = (X + 1)(X - i)(X + i)\left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)\left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right) \\ = (X + 1)(X^2 + 1)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right)\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ = (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

3.

$$P = (X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)(X^2 + 1 + \sqrt{2}X) = (X + 1)(X^2 + 1)\left((X^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}X)^2\right) \\ = (X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 2X^2 + 1 - 2X^2) = (X + 1)(X^2 + 1)(X^4 + 1)$$

Allez à : **Exercice 5**

Correction exercice 6.

$$P(X) = 1 + \left(\frac{X}{2}\right) + \left(\frac{X}{2}\right)^2 + \left(\frac{X}{2}\right)^3 + \left(\frac{X}{2}\right)^4 + \left(\frac{X}{2}\right)^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{X}{2}\right)^6}{1 - \frac{X}{2}} = 0 \\ \frac{X}{2} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 0 \\ X \neq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \\ X \neq 2 \end{cases}$$

Or $\left(\frac{X}{2}\right)^6 = 1 \Leftrightarrow X_k = 2e^{\frac{2ik\pi}{6}} = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$ avec $k \in \{0,1,2,3,4,5\}$ donc $X_k = 2e^{\frac{ik\pi}{3}}$

Ce qui donne $X_0 = 2$, $X_1 = 2e^{\frac{i\pi}{3}} = -2j = -2j^2$, $X_2 = 2e^{\frac{2i\pi}{3}} = 2j$, $X_3 = 2e^{i\pi} = -2$, $X_4 = 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2j^2$, $X_5 = 2e^{\frac{5i\pi}{3}} = -2j$

Les 5 racines de P sont $X_1 = -2j^2$, $X_2 = 2j$, $X_3 = -2$, $X_4 = 2j^2$ et $X_5 = -2j$. On a enlevé $X = 2$.

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{32} \times (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j) \\ &= (X + 2j^2)(X - 2j)(X + 2)(X - 2j^2)(X + 2j) \end{aligned}$$

La décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{1}{32} (X + 2)(X - 2j)(X - 2j^2)(X + 2j^2)(X + 2j) \\ &= \frac{1}{32} (X + 2)(X^2 - 2(j + j^2)X + 4j^3)(X^2 + 2(j + j^2)X + 4j^3) \\ &= \frac{1}{32} (X + 1)(X^2 + 2X + 4)(X^2 - 2X + 4) \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 6**

Correction exercice 7.

1.

$$P = 1 + (-X) + (-X)^2 + (-X)^3 + (-X)^4 = \frac{1 - (-X)^5}{1 - (-X)} = \frac{1 + X^5}{1 + X}$$

Pour $X \neq -1$

Les racines vérifient

$$\begin{aligned} \begin{cases} X^5 = -1 \\ X \neq 1 \end{cases} = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} |X^5| = |-1| \\ \arg(X^5) = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ 5 \arg(X) = (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ X \neq 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} |X| = 1 \\ \arg(X) = \frac{2k + 1}{5} \pi, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ X \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{2k+1}{5}i\pi}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4\} \\ X \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$X_0 = e^{\frac{i\pi}{5}}; X_1 = e^{\frac{3i\pi}{5}}; X_2 = e^{\frac{5i\pi}{5}} = -1; X_3 = e^{\frac{7i\pi}{5}} = e^{\frac{-3i\pi}{5}}; X_4 = e^{\frac{-i\pi}{5}}$$

On élimine $X_3 = -1$

2. Dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = \left(X - e^{\frac{i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{-\frac{i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{5}}\right) \left(X - e^{-\frac{3i\pi}{5}}\right)$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 1\right) \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + 1\right)$$

Allez à : **Exercice 7**

Correction exercice 8.

1. $P = X^2(-X + 1) + (-X + 1) = -(X - 1)(X^2 + 1)$ dans $\mathbb{R}[X]$

$P = -(X - 1)(X - i)(X + i)$ dans $\mathbb{C}[X]$

2. Si $X \neq -1$.

$$P = \sum_{k=0}^{2n-1} (-X)^k = \frac{1 - (-X)^{2n}}{1 - (-X)} = \frac{1 - (-X)^{n+1}}{1 + X}$$

Les racines de P vérifie $X^{(n+1)} = 1$ et $X \neq -1$.

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (-X)^{n+1} = 1 \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -X = e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ X \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, n\} \\ X \neq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = -e^{\frac{2ik\pi}{n+1}}, k \in \{1, \dots, n\}$$

Allez à : **Exercice 8**

Correction exercice 9.

Pour $X^2 \neq 1$

$$P(X) = 1 + X^2 + (X^2)^2 + (X^2)^3 = \frac{1 - (X^2)^4}{1 - X^2} = \frac{1 - X^8}{1 - X^2}$$

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X^8 = 1 \\ X^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{2ik\pi}{8}}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \\ X \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\} \\ X \neq \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow X = e^{\frac{ik\pi}{4}}, k \in \{1,2,3,5,6,7\}$$

Car pour $k = 0, e^{\frac{ik\pi}{4}} = 1$ et pour $k = 4, e^{\frac{ik\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1$

Les racines de P sont :

$$X_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}; X_2 = e^{\frac{2i\pi}{4}} = i; X_3 = e^{\frac{3i\pi}{4}}; X_5 = e^{\frac{5i\pi}{4}} = e^{-\frac{3i\pi}{4}}; X_6 = e^{\frac{6i\pi}{4}} = -i \text{ et } X_7 = e^{\frac{7i\pi}{4}} = e^{-\frac{i\pi}{4}}$$

La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P(X) = \left(X - e^{\frac{i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-\frac{i\pi}{4}}\right) (X - i)(X + i) \left(X - e^{\frac{3i\pi}{4}}\right) \left(X - e^{-\frac{3i\pi}{4}}\right)$$

Et dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P(X) = \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)X + 1\right) (X^2 + 1) \left(X^2 - 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)X + 1\right) \\ = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Allez à : **Exercice 9**

Correction exercice 10.

1.

$$P(j) = j^6 + 2j^5 + 4j^4 + 4j^3 + 4j^2 + 2j + 1 = 1 + 2j^2 + 4j + 4 + 4j^2 + 2j + 1 = 6j^2 + 6j + 6 \\ = 6(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 6X^5 + 10X^4 + 16X^3 + 12X^2 + 8X + 2$$

$$P'(j) = 6j^5 + 10j^4 + 16j^3 + 12j^2 + 8j + 2 = 6j^2 + 10j + 16 + 12j^2 + 8j + 2 = 18j^2 + 18j + 18 \\ = 18(j^2 + j + 1) = 0$$

Donc j est racine double, comme P est un polynôme à coefficients réels, \bar{j} est aussi racine double.

On peut essayer de voir si j ne serait pas racine triple (mais cela ne marche pas).

2. Soit on a l'intuition de voir que i est racine (et que donc $-i$ est aussi racine), soit on ne le voit pas et il faut diviser P par

$$(X - j)^2(X - \bar{j})^2 = \left((X - j)(X - \bar{j})\right)^2 = (X^2 + X + 1)^2 = X^4 + X^2 + 1 + 2X^3 + 2X^2 + 2X \\ = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$$

$X^6 + 2X^5 + 4X^4 + 4X^3 + 4X^2 + 2X + 1$	$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$
$X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 2X^3 + X^2$	$X^2 + 1$
$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$	
$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$	
0	

$$P = (X - j)^2(X - \bar{j})^2(X - i)(X + i)$$

3.

$$P = (X^2 + X + 1)^2(X^2 + 1)$$

Allez à : **Exercice 10**

Correction exercice 11.

1.

$$P(j) = j^8 + 2X^6 + 3j^4 + 2j^2 + 1 = j^2 + 2 + 3j + 2j^2 + 1 = 3j^2 + 3j + 3 = 3(j^2 + j + 1) = 0$$

j est une racine de P

$$P' = 8X^7 + 12X^5 + 12X^3 + 4X$$

$$P'(j) = 8j^7 + 12j^5 + 12j^3 + 4j = 8j + 12j^2 + 12 + 4j = 12j^2 + 12j + 12 = 12(j^2 + j + 1) = 0$$

j est racine au moins double, j est donc une racine multiple.

2. Comme P est pair, $-j$ est aussi une racine double, ce polynôme est à coefficients réels donc $\bar{j} = j^2$ est racine double et $\overline{-j} = -j^2$ est aussi racine double, cela fait 8 racines en tout (en comptant la multiplicité de racines), comme ce polynôme est degré 8, on les a toutes. Le coefficient dominant est 1, on en déduit la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

$$P = (X - j)^2(X - j^2)^2(X + j)^2(X + j^2)^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = [(X - j)(X - j^2)]^2[(X + j)(X + j^2)]^2 = [X^2 + X + 1]^2[X^2 - X + 1]^2$$

Allez à : [Exercice 11](#)

Correction exercice 12.

1.

$$P(j) = 2j^3 + 3j^2 + 6j + 1 + 3j = 2 + 3j^2 + 6j + 1 - 3j = 3j^2 + 3j + 3 = 3(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 6X^2 + 6X + 6$$

$$P'(j) = 6j^2 + 6j + 6 = 6(j^2 + j + 1) = 0$$

Donc j est une racine double de P .

2. La somme des racines de P est $-\frac{3}{2}$, si on appelle α la troisième racine on a

$$\alpha + 2j = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2} - 2j = -\frac{3}{2} - 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + i\sqrt{3}$$

Donc

$$P = 2(X - j)^2\left(X + \frac{1}{2} - i\sqrt{3}\right)$$

Allez à : [Exercice 12](#)

Correction exercice 13.

1.

$$(X + 1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X + 1}{X}\right)^6 = 1$$

Il est clair que 0 n'est pas racine. Mais attention $(X + 1)^6 - X^6$ est un polynôme de degré 5

$$(X + 1)^6 = X^6 \Leftrightarrow \left(\frac{X + 1}{X}\right)^6 = 1$$

$$\frac{X + 1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

La racine « en trop » est celle qui aurait vérifié $\frac{X+1}{X} = 1$ qui n'a pas de solution, on enlève donc $k = 0$.

$$1 + \frac{1}{X} = e^{\frac{2ik\pi}{6}}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow \frac{1}{X} = e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \Leftrightarrow X = \frac{1}{e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\Leftrightarrow X = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)}, \quad k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

Les cinq racines sont

$$X_k = \frac{e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1}{\left(e^{\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)\left(e^{-\frac{ik\pi}{3}} - 1\right)} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) - 1 + i \sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{2 - 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)}$$

2. Pour que P admette une racine multiple réelle (donc au moins double), P et P' ont une racine réelle commune.

$$P' = 7(X + 1)^6 - 7X^6$$

Les racines réelles et complexes de P' vérifient $(X + 1)^6 - X^6 = 0$

On cherche les racines réelles donc $\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right) = 0$ ce qui équivaut à $k = 0$ (mais on a éliminé ce cas) et $k = 3$

$$X_3 = \frac{\cos(\pi) - 1}{2 - 2 \cos(\pi)} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

P admet une racine double si et seulement si $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} + 1\right)^7 - \left(-\frac{1}{2}\right)^7 + a = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^7} + a = 0 \Leftrightarrow a = -2 \times \frac{1}{2^7} = -\frac{1}{2^6}$$

Et alors

$$P = (X + 1)^7 - X^7 - \frac{1}{2^6}$$

Allez à : **Exercice 13**

Correction exercice 14.

- La réponse est non car les seuls polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 qui n'ont pas de racines réelles. La question ne demande pas de factoriser ce polynôme.
- Les limites de la fonction polynômiale définie par $B(x) = x^3 + 3x + 1$ en $-\infty$ vaut $-\infty$ et en $+\infty$ vaut $+\infty$, cette fonction est continue, donc le théorème des valeurs intermédiaires entraîne qu'il existe x_0 tel que $B(x_0) = 0$. B admet une racine réelle. Ceci dit le même raisonnement qu'au 1°) est valable aussi.

Allez à : **Exercice 14**

Correction exercice 15.

$P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + aX^2 + bX + c$ est factorisable par $Q = (X^2 - 1)(X - 3)$ si et seulement si -1 , 1 et 3 sont racines de P .

$$\begin{cases} P(-1) = (-1)^5 - 2 \times (-1)^4 - 6 \times (-1)^3 + a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c = 0 \\ P(1) = 1^5 - 2 \times 1^4 - 6 \times 1^3 + a \times 1^2 + b + c = 0 \\ P(3) = 3^5 - 2 \times 3^4 - 6 \times 3^3 + a \times 3^2 + b \times 3 + c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 - 2 + 6 + a - b + c = 0 \\ 1 - 2 - 6 + a + b + c = 0 \\ 3^4(3 - 2 - 2) + 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 \begin{cases} a - b + c = -3 \\ a + b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 81 \end{cases} \\ L_2 \\ L_3 \end{cases}$$

$L_2 - L_1$ entraîne que $2b = 10$ donc $b = 5$

Et $L_2 + L_1$ entraîne que $2a + 2c = 4$ donc $a + c = 2 : L'_1$

On remplace $b = 5$ dans $L_3 : 9a + 15 + c = 81$ donc $9a + c = 66 : L'_2$

$L'_2 - L'_1$ entraîne que $8a = 64$ donc $a = 8$ et donc $c = 2 - 8 = -6$

Finalement $P = X^5 - 2X^4 - 6X^3 + 8X^2 + 5X - 6$

Allez à : **Exercice 15**

Correction exercice 16.

A_n est divisible par B si et seulement si les racines de B sont aussi des racines de A_n .

Le discriminant de $X^2 - X + 1$ est $\Delta = 1 - 4 = -3$ donc les deux racines de B sont :

$$X_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$

$$X_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j$$

Remarque : $X^2 - X + 1 = 0 \Leftrightarrow (-X)^2 + (-X) + 1 = 0$

Donc les racines du polynôme B vérifient

$$-X = j \quad \text{ou} \quad -X = j^2$$

$$A_n(-j) = (-j - 1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = (j^2)^n (j^2)^2 + (-j)^{2n}(-j) = j^{2n}j^4 - j^{2n}j = 0$$

Comme A_n est un polynôme à coefficients réels, $-\bar{j} = -j^2$ est aussi racine.

On conclut que $X^2 - X + 1$ divise $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Allez à : [Exercice 16](#)

Correction exercice 17.

$$P_n(j) = (j + 1)^n - j^n - 1 = (-j^2)^n - j^n - 1 = (-1)^n j^{2n} - j^n - 1$$

Si $n = 6p$

$$P_{6p}(j) = j^{12p} - j^{6p} - 1 = 1 - 1 - 2 = -2 \neq 0$$

Si $n = 6p + 1$

$$P_{6p+1}(j) = -j^{12p+2} - j^{6p+1} - 1 = -j^2 - j - 1 = 0$$

Si $n = 6p + 2$

$$P_{6p+2}(j) = j^{12p+4} - j^{6p+2} - 1 = j - j^2 - 1 = 2j \neq 0$$

Si $n = 6p + 3$

$$P_{6p+3}(j) = -j^{12p+6} - j^{6p+3} - 1 = -1 - 1 - 1 = -3 \neq 0$$

Si $n = 6p + 4$

$$P_{6p+4}(j) = j^{12p+8} - j^{6p+4} - 1 = j^2 - j - 1 = 2j^2 \neq 0$$

Si $n = 6p + 5$

$$P_{6p+5}(j) = -j^{12p+10} - j^{6p+5} - 1 = -j - j^2 - 1 = 0$$

Allez à : [Exercice 17](#)

Correction exercice 18.

Il existe $A, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$X^n + X + 1 = A(X - 1)^2 + R \quad (*)$$

Avec $d^\circ R < 2$ donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$, ce qui entraîne que $R' = a$

Prenons $X = 1$

$$3 = R(1) = a + b$$

On dérive (*)

$$nX^{n-1} + 1 = A'(X - 1)^2 + A(X - 1) + R'$$

On prend $X = 1$

$$n + 1 = a$$

On en déduit que

$$b = 3 - a = 3 - (n + 1) = 2 - n$$

Et finalement

$$R = (n + 1)X + 2 - n$$

Allez à : [Exercice 18](#)

Correction exercice 19.

$$(X + 1)^n = (X^2 + 1)Q + R$$

Or $d^\circ R < 2$ et donc $R = aX + b$.

On pose $X = i$.

$$(i+1)^n = ai + b \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) \right)^n = b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \right)^n = b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n e^{\frac{ni\pi}{4}}$$

$$= b + ai \Leftrightarrow (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) = b + ai \Leftrightarrow \begin{cases} a = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ b = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{cases}$$

Donc

$$R = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) X + (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

Allez à : **Exercice 19**

Correction exercice 20.

Il existe un unique couple (Q, R) de polynômes, avec $d^\circ R < 2$ tels que :

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + R$$

Il existe a et b réels tels que $R = aX + b$

$$(X+1)^n = (X-1)^2 Q + aX + b \quad (*)$$

On pose $X = 1$

$$2^n = a + b$$

On dérive $(*)$

$$n(X+1)^{n-1} = 2(X-1)Q + (X-1)^2 Q' + a$$

On pose $X = 1$

$$n2^{n-1} = a$$

Donc $b = 2^n - n2^{n-1}$

Finalement

$$R = n2^{n-1}X + 2^n - n2^{n-1}$$

Allez à : **Exercice 20**

Correction exercice 21.

Il existe Q_n et R_n tels que :

$$A_n = BQ_n + R_n \Leftrightarrow X^n + X + b = (X-a)^2 Q_n + R_n$$

Avec $d^\circ R_n < 2$. Donc il existe α_n et β_n tels que :

$$X^n + X + b = (X-a)^2 Q_n + \alpha_n X + \beta_n \quad (1)$$

En dérivant on trouve

$$nX^{n-1} + 1 = (X-a)[2Q_n + (X-a)^2 Q'_n] + \alpha_n \quad (2)$$

On fait $X = a$ dans (1) et dans (2).

$$\begin{cases} a^n + a + b = \alpha_n a + \beta_n \\ na^{n-1} + 1 = \alpha_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = na^n + 1 \\ \beta_n = a^n + a + b - (na^{n-1} + 1)a = -(n-1)a^n + b \end{cases}$$

Donc

$$R_n = (na^n + 1)X - (n-1)a^n + b$$

Allez à : **Exercice 21**

Correction exercice 22.

Il existe Q et R tels que $A = BQ + R$ et $d^\circ R < d^\circ B = 2$ donc degré de R est inférieur ou égal à 1 on a alors $R = aX + b$ où a et b sont des réels.

$$A(i) = B(i)Q(i) + R(i) \Leftrightarrow i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \text{ car } B(i) = i^2 + 1 = 0$$

$$\text{Si } n = 2p \quad i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \Leftrightarrow i^{4p} + 2i^{2p} + 1 = ai + b \Leftrightarrow 1 + 2(-1)^p + 1 = ai + b \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 2 + 2(-1)^p \end{cases}$$

$$\text{Donc } R = 2 + 2(-1)^p$$

Si $n = 2p + 1$

$$i^{2n} + 2i^n + 1 = ai + b \Leftrightarrow i^{4p+2} + 2i^{2p+1} + 1 = ai + b \Leftrightarrow -1 + 2(-1)^p i + 1 = ai + b \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2(-1)^p \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc $R = 2(-1)^p X$

Allez à : [Exercice 22](#)

Correction exercice 23.

1. Les quatre racines de $X^4 - 1 = 0$, c'est-à-dire $\{1, i, -1, -i\}$ vérifie $X^4 = 1$ donc $(X^4)^n - 1 = 1^n - 1 = 0$ donc ces racines sont des racines de $X^{4n} - 1$, on peut mettre $X^4 - 1$ en facteur dans ce polynôme.

2.

Première méthode :

D'après la première question il existe Q_a, Q_b, Q_c et Q_d tels que :

$$X^{4a} - 1 = Q_a(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4a} = Q_a(X^4 - 1) + 1 \\ X^{4b} - 1 = Q_b(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4b} = Q_b(X^4 - 1) + 1 \\ X^{4c} - 1 = Q_c(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4c} = Q_c(X^4 - 1) + 1 \\ X^{4d} - 1 = Q_d(X^4 - 1) \Leftrightarrow X^{4d} = Q_d(X^4 - 1) + 1$$

Donc

$$P = X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = X^{4a}X^3 + X^{4b}X^2 + X^{4c}X + X^{4d} \\ = (Q_a(X^4 - 1) + 1)X^3 + (Q_b(X^4 - 1) + 1)X^2 + (Q_c(X^4 - 1) + 1)X + Q_d(X^4 - 1) \\ + 1 = (X^4 - 1)[Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d] + X^3 + X^2 + X + 1 \\ = (X - 1)(X^3 + X^2 + X + 1)[Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d] + X^3 + X^2 + X + 1 \\ = (X^3 + X^2 + X + 1)((X - 1)(Q_aX^3 + Q_bX^2 + Q_cX + Q_d) + 1)$$

Deuxième méthode : $X^{4n} - 1 \equiv 0 \pmod{X^4 - 1} \Leftrightarrow X^{4n} \equiv 1 \pmod{X^4 - 1}$

Donc

$$X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = X^{4a}X^3 + X^{4b}X^2 + X^{4c}X + X^{4d} \\ \equiv 1 \times X^3 + 1 \times X^2 + 1 \times X + 1 \pmod{X^4 - 1} \equiv X^3 + X^2 + X + 1 \pmod{X^4 - 1}$$

Donc il existe Q tel que

$$X^{4a+3} + X^{4b+2} + X^{4c+1} + X^{4d} = (X^4 - 1)Q + X^3 + X^2 + X + 1 \\ = (X^3 + X^2 + X + 1)((X - 1)Q + 1)$$

Allez à : [Exercice 23](#)

Correction exercice 24.

Les trois racines de P sont $\alpha, 2\alpha$ et β , les relations entre les racines et les coefficients de P donnent

$$\begin{cases} \alpha + 2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha \times 2\alpha + \alpha\beta + 2\alpha\beta = -63 \\ \alpha \times 2\alpha \times \beta = -162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha^2 + 3\alpha\beta = -63 \\ 2\alpha^2\beta = -162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ 2\alpha^2 + 3\alpha(-3\alpha) = -63 \\ 2\alpha^2(-3\alpha) = -162 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ -7\alpha^2 = -63 \\ -6\alpha^3 = -162 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ \alpha^2 = 9 \\ \alpha^3 = 27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3\alpha \\ \alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -9 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

Les trois racines de P sont 3, 6 et -9

Allez à : [Exercice 24](#)

Correction exercice 25.

1. On rappelle que $\alpha + \beta + \gamma = 0$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = p$ et $\alpha\beta\gamma = -q$

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

Donc

$$A = 0^2 - 2p = -2p$$

2. $\alpha^3 + p\alpha + q = 0$ entraîne que $\alpha^3 = -p\alpha - q$, idem pour β et γ .

$$B = -p\alpha - q - p\beta - q - p\gamma - q = -p(\alpha + \beta + \gamma) - 3q = -3q$$

3.

$$C = \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \gamma) + \beta\gamma(\beta + \gamma) = \alpha\beta(-\gamma) + \alpha\gamma(-\beta) + \beta\gamma(-\alpha) = -3\alpha\beta\gamma = 3q$$

4.

$$\begin{aligned} D &= \alpha^3\beta + \alpha\beta^3 + \alpha^3\gamma + \alpha\gamma^3 + \beta^3\gamma + \beta\gamma^3 = \alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\gamma(\alpha^2 + \gamma^2) + \beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2) \\ &= \alpha\beta(-2p - \gamma^2) + \alpha\gamma(-2p - \beta^2) + \beta\gamma(-2p - \alpha^2) \\ &= -2p(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) - \alpha\beta\gamma^2 - \alpha\beta^2\gamma - \alpha^2\beta\gamma = -2p^2 - \alpha\beta\gamma(\gamma + \beta + \alpha) \\ &= -2p^2 - (q) \times 0 = -2p^2 \end{aligned}$$

Allez à : **Exercice 25**

Correction exercice 26.

1. $0 \times P(-1) = (0 - 2)P(0) \Leftrightarrow 0 = -2P(0) \Leftrightarrow P(0) = 0$

$$1 \times P(0) = (1 - 2)P(1) \Leftrightarrow P(0) = -P(1) \Leftrightarrow 0 = P(1)$$

Donc 0 et 1 sont des racines de P .

2. Soit $a \neq 0$ tel que $P(a) = 0$. $aP(a - 1) = (a - 2)P(a) \Leftrightarrow aP(a - 1) = 0 \Leftrightarrow P(a - 1) = 0$

$a - 1$ est une racine de P .

Soit $a \neq 1$ tel que $P(a) = 0$.

$$\begin{aligned} (a + 1)P(a + 1 - 1) &= (a + 1 - 2)P(a + 1) \Leftrightarrow (a + 1)P(a) = (a - 1)P(a + 1) \Leftrightarrow 0 \\ &= (a - 1)P(a + 1) \end{aligned}$$

Donc $P(a + 1) = 0$, $a + 1$ est une racine de P .

3. Supposons que P admette une racine a telle que $\operatorname{Re}(a) < 1$ différente de 0 alors $a - 1$ est racine, $a - 1$ est différent de 0, donc $a - 2$ est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a - k$ est racine de P , ce qui voudrait dire que P admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.

Supposons que P admette une racine a telle que $\operatorname{Re}(a) > 1$ différente de 1 alors $a + 1$ est racine, $a + 1$ est différent de 1, donc $a + 2$ est aussi racine, on en déduit aisément que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a + k$ est racine de P , ce qui voudrait dire que P admettrait une infinité de solution or un polynôme non nul admet un nombre fini de solutions.

0 et 1 sont les deux seules racines de P si P n'est pas le polynôme nul.

4. Si P n'est pas le polynôme nul, comme 0 et 1 sont les seules racines de P il existe $\alpha \neq 0$ tels que $P = \alpha X^k(X - 1)^l$, et si $P = 0$ alors $P = 0 \times X^k(X - 1)^l$ (c'est-à-dire que $\alpha = 0$).

5. Si P vérifie $XP(X - 1) = (X - 2)P(X)$ alors P est de la forme $P = \alpha X^k(X - 1)^l$, il faut étudier la réciproque, c'est-à-dire chercher parmi ces polynômes lesquels sont effectivement solution.

On remplace $P = \alpha X^k(X - 1)^l$ dans $XP(X - 1) = (X - 2)P(X)$, on trouve que :

$$X\alpha(X - 1)^k(X - 2)^l = (X - 2)\alpha X^k(X - 1)^l$$

Les puissances en $X - 2$ sont les mêmes donc $l = 1$.

Les puissances en $X - 1$ sont les mêmes donc $k = l = 1$

On vérifie qu'alors les puissances en X sont les mêmes, finalement

$$P = \alpha X(X - 1)$$

Allez à : **Exercice 26**

Correction exercice 27.

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} 1 - 2X \quad + X^3 + X^4 \\ 1 + X \quad + X^2 \\ \hline -3X - X^2 \quad + X^3 + X^4 \\ -3X - 3X^2 - 3X^3 \end{array} & \begin{array}{l} 1 + X + X^2 \\ 1 - 3X + 2X^2 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 + 4X^3 + X^4 & \\ 2X^2 + 2X^3 + 2X^4 & \\ \hline 2X^3 - X^4 & \end{array}$$

$$1 - 2X + X^3 + X^4 = (1 + X + X^2)(1 - 3X + X^2) + X^3(2 - X)$$

Allez à : **Exercice 27**

Correction exercice 28.

1.

$$\begin{array}{r|l} X^3 - X^2 - X - 2 & X^3 - 1 \\ X^3 & 1 \\ \hline -X^2 - X - 1 & \end{array}$$

$$X^3 - X^2 - X - 2 = (X^3 - 1) \times 1 + (-X^2 - X - 1)$$

$$\begin{array}{r|l} X^3 & -1 & X^2 + X + 1 \\ X^3 + X^2 + X & & X - 1 \\ \hline -X^2 - X - 1 & & \\ -X^2 - X - 1 & & \\ \hline 0 & & \end{array}$$

$$X^3 - 1 = (X^2 + X + 1)(X - 1)$$

$$PGCD(P, Q) = \frac{-X^2 - X - 1}{-1} = X^2 + X + 1$$

2. $X^2 + X + 1$ est un diviseur de P (et de Q bien sur) donc on peut mettre $X^2 + X + 1$ en facteur dans P .

$$\begin{array}{r|l} X^3 - X^2 - X - 2 & X^2 + X + 1 \\ X^3 + X^2 + X & X - 2 \\ \hline -2X^2 - 2X - 2 & \\ -2X^2 - 2X - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Comme $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, la factorisation de P est :

$$P = (X - 2)(X^2 + X + 1)$$

Et il est évident d'après la deuxième division de l'algorithme d'Euclidienne

$$Q = (X - 1)(X^2 + X + 1)$$

3. Il est alors clair que

$$PGCD(P, Q) = X^2 + X + 1$$

4. Les deux racines complexes de $X^2 + X + 1$ sont $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\bar{j} = j^2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

Donc

$$P = (X - 2)(X - j)(X - j^2)$$

Allez à : **Exercice 28**

Correction exercice 29.

$$\begin{array}{r|l} X^5 + X^4 - 6X^3 - X^2 - X + 6 & X^4 + 2X^3 - X - 2 \\ X^5 + 2X^4 & X - 1 \\ \hline -X^4 - 6X^3 + X + 6 & \\ -X^4 - 2X^3 + X + 2 & \\ \hline -4X^3 & + 4 \end{array}$$

On peut « éliminer » le -4 dans $-4X^3 + 4$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 2X^3 & -X - 2 \\ X^4 & -X \\ \hline 2X^3 & -2 \\ 2X^3 & -2 \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} X^3 - 1 \\ \hline X + 2 \end{array}$$

Donc le PGCD de P et Q est

$$D = \frac{-4X^3 + 4}{-4} = X^3 - 1$$

Les racines communes de P et Q sont celles de $X^3 - 1$, c'est-à-dire $1, j$ et j^2 .

Allez à : **Exercice 29**

Correction exercice 30.

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 + 2X^3 & -X^2 - 2X - 2 \\ X^5 + 3X^4 + 3X^3 & -2X \\ \hline -X^4 - X^3 - X^2 & -2 \\ -X^4 - 3X^3 - 3X^2 & +2 \\ \hline 2X^3 + 2X^2 & -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} X^4 + 3X^3 + 3X^2 - 2 \\ \hline X - 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 3X^3 + 3X^2 & -2 \\ X^4 + X^3 & -2X \\ \hline 2X^3 + 3X^2 + 2X - 2 & \\ 2X^3 + 2X^2 & -4 \\ \hline X^2 + 2X + 2 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2X^3 + 2X^2 - 4 \\ \hline \frac{1}{2}X + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 + 2X^2 & -4 \\ 2X^3 + 4X^2 + 4X & \\ \hline -2X^2 - 4X - 4 & \\ -2X^2 - 4X - 4 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} X^2 + 2X + 2 \\ \hline 2X \end{array}$$

Le P.G.C.D. est le dernier reste non nul unitaire donc $X^2 + 2X + 2$

A et B sont divisible par $X^2 + 2X + 2$ (qui n'a pas de racine réelle)

$$\begin{array}{r|l} X^5 + 2X^4 + 2X^3 & -X^2 - 2X - 2 \\ X^5 + 2X^4 + 2X^3 & \\ \hline -X^2 - 2X - 2 & \\ -X^2 - 2X - 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} X^2 + 2X + 2 \\ \hline X^3 - 1 \end{array}$$

Donc

$$A = (X^2 + 2X + 2)(X^3 - 1)$$

Comme $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ et que $X^2 + X + 1$ n'a pas de racine réelle, la factorisation de A dans $\mathbb{R}[X]$ est

$$A = (X - 1)(X^2 + 2X + 2)(X^2 + X + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 3X^3 + 3X^2 & -2 \\ X^4 + 2X^3 + 2X^2 & \\ \hline X^3 + X^2 & -2 \\ X^3 + 2X^2 + 2X & \\ \hline -X^2 - 2X - 2 & \\ -X^2 - 2X - 2 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} X^2 + 2X + 2 \\ \hline X^2 + X + 1 \end{array}$$

Donc

$$B = (X^2 + 2X + 2)(X^2 + X - 1)$$

$X^2 + X - 1$ admet deux racines réelles

$$\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$B = (X^2 + 2X + 2) \left(X + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(X + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)$$

Allez à : [Exercice 30](#)

Correction exercice 31.

$$P = X^2 - 2X + 1$$

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 2X + 1 & X^2 + 1 \\ X^2 & 1 \\ \hline -2X & \\ \hline X^2 - 2X + 1 & = 1 \times (X^2 + 1) + (-2X) \\ X^2 + 1 & | -2X \\ X^2 & | -\frac{1}{2}X \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$X^2 + 1 = -2X \times \left(-\frac{1}{2}X \right) + 1$$

$$1 = (X^2 + 1) + (-2X) \left(-\frac{1}{2}X \right) = (X^2 + 1) + ((X^2 - 2X + 1) - 1 \times (X^2 + 1)) \left(-\frac{1}{2}X \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 = \left(1 + \frac{1}{2}X \right) (X^2 + 1) + \left(-\frac{1}{2}X \right) (X - 1)^2$$

Allez à : [Exercice 31](#)

Correction exercice 32.

1.

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 + X^3 & -2X - 1 \\ 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1 & 1 \\ \hline 2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 & \\ \hline P = 1 \times Q + 2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 1 & 2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 \\ 2X^4 + 3X^3 - 3X^2 - 2X & X - 2 \\ \hline -4X^3 + 3X + 1 & \\ -4X^3 - 6X^2 + 6X + 4 & \\ \hline 6X^2 - 3X - 3 & \end{array}$$

$$Q = (X - 2)(2X^3 + 3X^2 - 3X - 2) + 6X^2 - 3X - 3$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^3 + 3X^2 - 3X - 2 & 6X^2 - 3X - 3 \\ 2X^3 - X^2 - X & \frac{1}{3}X + \frac{2}{3} \\ \hline 4X^2 - 2X - 2 & \\ 4X^2 - 2X - 0 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$6X^2 - 3X - 3 = Q - (X - 2)(2X^3 + 3X^2 - 3X - 2) = Q - (X - 2)(P - Q)$$

$$= -(X - 2)P + (X - 1)Q$$

$$X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}(X-2)P + \frac{1}{6}(X-1)Q$$

2. Les racines communes de P et Q sont celles de leur $PGCD$, c'est-à-dire celles de $X^2 - \frac{1}{2}X - \frac{1}{2}$ soit

$$X_1 = 1 \text{ et } X_2 = -\frac{1}{2}.$$

Allez à : **Exercice 32**

Correction exercice 33.

1. $P' = 5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$

$X^5 + X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$	$5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$
$X^5 + \frac{4}{5}X^4 + \frac{6}{5}X^3 + \frac{4}{5}X^2 + \frac{X}{5}$	$\frac{1}{5}X + \frac{1}{25}$
$\frac{1}{5}X^4 + \frac{4}{5}X^3 + \frac{6}{5}X^2 + \frac{4}{5}X + 1$	
$\frac{1}{5}X^4 + \frac{4}{25}X^3 + \frac{6}{25}X^2 + \frac{4}{25}X + \frac{1}{25}$	
$\frac{16}{25}X^3 + \frac{24}{25}X^2 + \frac{16}{25}X + \frac{24}{25}$	

Pour éviter les fractions on remarque que $\frac{16}{25}X^3 + \frac{24}{25}X^2 + \frac{16}{25}X + \frac{24}{25} = \frac{8}{25}(2X^3 + 3X^2 + 2X + 3)$

$5X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$	$2X^3 + 3X^2 + 2X + 3$
$5X^4 + \frac{15}{2}X^3 + 5X^2 + \frac{15}{2}X$	$\frac{5}{2}X - \frac{7}{4}$
$-\frac{7}{2}X^3 + X^2 - \frac{7}{2}X + 1$	
$-\frac{7}{2}X^3 - \frac{21}{4}X^2 - \frac{7}{2}X - \frac{21}{4}$	
$\frac{25}{4}X^2 + \frac{25}{4}$	

Pour éviter les fractions on remarque que $\frac{25}{4}X^2 + \frac{25}{4} = \frac{25}{4}(X^2 + 1)$

$2X^3 + 3X^2 + 2X + 3$	$X^2 + 1$
$2X^3 + 2X$	$2X + 3$
$3X^2 + 3$	
$3X^2 + 3$	
0	

Le $PGCD$ de P et P' est $X^2 + 1$.

2. Les racines communes à P et P' sont i et $-i$, les racines multiples de P sont i et $-i$. Ce sont au moins des racines doubles. Ce ne sont pas des racines triples car sinon P auraient 6 racines en comptant leurs multiplicités.

3. P est divisible par $(X - i)^2(X + i)^2 = [(X - i)(X + i)]^2 = [X^2 + 1]^2$.

4. il reste à diviser P par $(X^2 + 1)^2 = X^4 + 2X^2 + 1$ et on trouve, après calculs, $X + 1$, donc

$$P = (X^2 + 1)^2(X + 1)$$

Allez à : **Exercice 33**

Correction exercice 34.

1. Oui ! Par exemple $P = X^3 + 1$

2. Si $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$, avec $a \neq 0$, pour qu'il soit de degré exactement 3.

$$\begin{aligned} P(X+1) - P(X) &= a(X+1)^3 + b(X+1)^2 + c(X+1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d \\ &= a(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) + b(X^2 + 2X + 1) + c(X+1) + d - aX^3 - bX^2 - cX - d \\ &= 3aX^2 + (3a + 2b)X + a + b + c \end{aligned}$$

Le degré de ce polynôme est 2 puisque $a \neq 0$

3.

$$\begin{cases} P(X+1) - P(X) = X^2 - 1 \\ P(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3a+b)X^2 + (3a+2b+c)X + a+b+c = X^2 - 1 \\ P(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix} \begin{cases} 3a = 1 \\ 3a + 2b = 0 \\ a + b + c = -1 \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ 2b = -3a = -1 \\ c = -1 - a - b \\ d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6} \\ d = 1 \end{cases}$$

$$P = \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 - \frac{5}{6}X + 1$$

Allez à : **Exercice 34**

Correction exercice 35.

1. $(X-1)^n$ n'a qu'une racine $X=1$, or 1 est racine simple de $X^n - 1$ donc

$$\text{PGCD}((X^n - 1), (X - 1)^n) = X - 1$$

2. D'après le théorème de Bézout il existe (U, V) tels que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1$$

Cette équation équivaut à :

$$(X^2 + X + 1)U + (X^2 - 2X + 1)V = 1$$

Car $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$ et $(X - 1)^3 = (X - 1)(X^2 - 2X + 1)$

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 2X + 1 & X^2 + X + 1 \\ \hline X^2 + X + 1 & 1 \\ \hline -3X & \end{array}$$

Donc

$$X^2 - 2X + 1 = 1 \times (X^2 + X + 1) + (-3X)$$

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X + 1 & -3X \\ \hline X^2 & -\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \\ \hline X + 1 & \\ \hline X & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Donc

$$X^2 + X + 1 = (-3X) \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) + 1$$

On en tire que :

$$\begin{aligned} 1 &= (X^2 + X + 1) - (-3X) \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \\ &= X^2 + X + 1 - ((X^2 - 2X + 1) - 1 \times (X^2 + X + 1)) \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \\ &= - \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) (X^2 - 2X + 1) + \left(1 + \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \right) (X^2 + X + 1) \\ &= \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{3} \right) (X^2 - 2X + 1) + \left(-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3} \right) (X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

Donc

$$U = -\frac{1}{3}X + \frac{2}{3}$$

Et

$$V = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$$

Allez à : **Exercice 35**

Correction exercice 36.

1.

$$\begin{array}{r|l} X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 & X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 \\ X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 & 1 \\ \hline -6X^3 & -6X \end{array}$$

$$X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2 = (X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2) \times 1 + (-6X^3 - 6)$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 & -6X^3 - 6X \\ X^4 & -\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \\ \hline 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2 & \\ 3X^3 & + 3X \\ \hline 2X^2 & + 2 \end{array}$$

$$X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (-6X^3 - 6X) \left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \right) + 2X^2 + 2$$

$$\begin{array}{r|l} -6X^3 - 6X & 2X^2 + 2 \\ -6X^3 - 6X & -\frac{1}{3}X \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$-6X^3 - 6X = (2X^2 + 2) \left(-\frac{1}{3}X \right)$$

Donc

$$PGCD(X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2, X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) = \frac{2X^2 + 2}{2} = X^2 + 1$$

On trouve une identité de Bézout de la façon suivante :

$$\begin{aligned} 2X^2 + 2 &= X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 + (-6X^3 - 6X) \left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \right) \\ &= X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 \\ &\quad - (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2 - (X^4 + 3X^3 + 2X^2 + 3X + 2) \times 1) \left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \right) \\ &= (X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) \left(1 - \left(-\frac{1}{6}X - \frac{1}{2} \right) \right) \\ &\quad + (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2) \left(\frac{1}{6}X + \frac{1}{2} \right) \\ &= (X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) \left(\frac{1}{6}X + \frac{3}{2} \right) \\ &\quad + (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2) \left(\frac{1}{6}X + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Puis il reste à diviser par 2

$$X^2 + 1 = (X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2) \left(\frac{1}{12}X + \frac{3}{4} \right) + (X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 3X + 2) \left(\frac{1}{12}X + \frac{1}{4} \right)$$

2. En divisant P par $X^2 + 1$, on trouve :

$$P = X^4 - 3X^3 + 3X^2 - 3X + 2 = (X^2 - 3X + 2)(X^2 + 1)$$

Il reste à factoriser $X^2 - 3X + 2$, ce polynôme a deux racines réelles 1 et 2 donc

$$P = (X - 1)(X - 2)(X^2 + 1)$$

En divisant Q par $X^2 + 1$, on trouve :

$$Q = X^4 + 3X^3 + 3X^2 + 3X + 2 = (X^2 + 3X + 2)(X^2 + 1)$$

Il reste à factoriser $X^2 + 3X + 2$, ce polynôme a deux racines réelles -1 et -2 donc

$$Q = (X + 1)(X + 2)(X^2 + 1)$$

Allez à : **Exercice 36**

Correction exercice 37.

1. Je vais juste écrire les résultats des divisions successives de l'algorithme d'Euclide

$$X^2 + 2X + 1 = 1 \times (X^2 - 2X + 1) + 4X$$

$$X^2 - 2X + 1 = \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right) \times 4X + 1$$

On en déduit une identité de Bézout

$$\begin{aligned} 1 &= (X - 1)^2 - \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right) \times 4X = (X - 1)^2 - \left(\frac{1}{4}X - \frac{1}{2}\right) ((X + 1)^2 - 1 \times (X - 1)^2) \\ &= \left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right) (X + 1)^2 + \left(\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right) (X - 1)^2 \end{aligned}$$

On note

$$A_0 = -\frac{1}{4}X + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad B_0 = \frac{1}{4}X + \frac{1}{2}$$

2. On a

$$\begin{cases} (X + 1)^2 A + (X - 1)^2 B = 1 \\ (X + 1)^2 A_0 + (X - 1)^2 B_0 = 1 \end{cases}$$

En faisant la soustraction de ces deux équations

$$(X + 1)^2(A - A_0) + (X - 1)^2(B - B_0) = 0 \Leftrightarrow (X + 1)^2(A - A_0) = -(X - 1)^2(B - B_0)$$

$(X + 1)^2$ divise $-(X - 1)^2(B - B_0)$ comme $(X + 1)^2$ et $(X - 1)^2$ sont premiers entre eux (ils n'ont aucune racine en commun), d'après le théorème de Gauss $(X + 1)^2$ divise $-(B - B_0)$, il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$-(B - B_0) = U(X + 1)^2 \Leftrightarrow B = B_0 - U(X + 1)^2$$

On remplace dans $(X + 1)^2(A - A_0) = -(X - 1)^2(B - B_0)$

$$(X + 1)^2(A - A_0) = (X - 1)^2 U(X + 1)^2 \Leftrightarrow A - A_0 = (X - 1)^2 U \Leftrightarrow A = A_0 + U(X - 1)^2$$

L'ensemble des couples $(A = A_0 + U(X - 1)^2, B_0 - U(X + 1)^2)$ avec $U \in \mathbb{R}[X]$ quelconque sont les solutions de (E).

3. On cherche les polynômes P qui sont de la forme

$$\begin{cases} P - 1 = (X + 1)^2 Q_1 \\ P + 1 = (X - 1)^2 Q_2 \end{cases}$$

Où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes.

En faisant la soustraction de ces deux égalités

$$2 = (X - 1)^2 Q_2 - (X + 1)^2 Q_1 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} Q_1\right) (X + 1)^2 + \left(\frac{1}{2} Q_2\right) (X - 1)^2 = 1$$

D'après la deuxième question, il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} Q_1 = A_0 + U(X - 1)^2 \\ \frac{1}{2} Q_2 = B_0 - U(X + 1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q_1 = -2A_0 - 2U(X - 1)^2 \\ Q_2 = 2B_0 - 2U(X + 1)^2 \end{cases}$$

Ce qui entraîne que

$$P - 1 = (X + 1)^2(-2A_0 - 2U(X - 1)^2) \Leftrightarrow P = 1 - 2A_0(X + 1)^2 - 2U(X + 1)^2(X - 1)^2$$

$$\begin{aligned}
 1 - 2A_0(X+1) &= 1 - 2\left(-\frac{1}{4}X + \frac{1}{2}\right)(X+1) = 1 + \left(\frac{1}{2}X - 1\right)(X^2 + 2X + 1) \\
 &= 1 + \frac{1}{2}X^3 + X^2 + \frac{1}{2}X - X^2 - 2X - 1 = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X
 \end{aligned}$$

On pose aussi $V = -2U$. Par conséquent

$$P = \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + V(X^2 - 1)^2, \quad V \in \mathbb{R}[X]$$

Il faut faire une réciproque

$\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X - 1$ admet -1 comme racine double (c'est facile à vérifier) et 2 comme racine simple.

$$\begin{aligned}
 P - 1 &= \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X - 1 + V(X^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}(X+1)^2(X-2) + V(X+1)^2(X-1)^2 \\
 &= (X+1)^2 \left[\frac{1}{2}(X-2) + V(X-1)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1$ admet 1 comme racine double (c'est facile à vérifier) et -2 comme racine simple.

$$\begin{aligned}
 P + 1 &= \frac{1}{2}X^3 - \frac{3}{2}X + 1 + V(X^2 - 1)^2 = \frac{1}{2}(X-1)^2(X+2) + V(X+1)^2(X-1)^2 \\
 &= (X-1)^2 \left[\frac{1}{2}(X+2) + V(X+1)^2 \right]
 \end{aligned}$$

La réciproque est vérifiée

Allez à : [Exercice 37](#)

Correction exercice 38.

X^6	$-X^4$	$-X^2$	$+1$	$X^4 + 2X^3 - 2X - 1$
$X^6 + 2X^5$	$-2X^3$	$-X^2$		$X^2 - 2X + 3$
$-2X^5 - X^4$	$+2X^3$		$+1$	
$-2X^5 - 4X^4$		$+4X^2$	$+2X$	
$3X^4 + 2X^3$	$-4X^2$		$-2X + 1$	
$3X^4 + 6X^3$			$-6X - 3$	
	$-4X^3$	$-4X^2$	$+4X + 4$	

$$PGCD(P, Q) = PGCD(Q, -4X^3 - 4X^2 + 4X + 4) = PGCD(Q, X^3 + X^2 - X - 1)$$

$X^4 + 2X^3$	$-2X - 1$	$X^3 + X^2 - X - 1$
$X^4 + X^3 - X^2 - X$		$X + 1$
$X^3 + X^2 - X - 1$		
$X^3 + X^2 - X - 1$		
	0	

$$\text{Donc } PGCD(P, Q) = X^3 + X^2 - X - 1 = X^2(X+1) - (X+1) = (X^2 - 1)(X+1) = (X-1)(X+1)^2$$

Les racines complexes communes à P et Q sont 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2 .

Allez à : [Exercice 38](#)

Correction exercice 39.

On pose $d^\circ P = n$.

P' divise P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que :

$$P = QP'$$

$$d^\circ P = n \text{ et } d^\circ P' = n - 1 \Rightarrow d^\circ Q = 1$$

Donc Q admet une racine complexe α .

On pose $Q = aX + b$ et $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ (avec $a_n \neq 0$) alors $P' = na_n X^{n-1} + \dots + a_1$

En identifiant les coefficients dominant on trouve que :

$$a_n = na \Leftrightarrow a_n = \frac{1}{n}$$

Première méthode :

La formule de Taylor pour le polynôme P en α donne

$$P = \sum_{k=0}^n a_k (X - \alpha)^k = a_0 + a_1 (X - \alpha) + a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + a_n (X - \alpha)^n$$

Donc

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{k=0}^n a_k k (X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^n a_k k (X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=1}^n a_k k (X - \alpha)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} (X - \alpha)^k \\ &= a_1 + 2a_2 (X - \alpha) + \dots + na_n (X - \alpha)^{n-1} \end{aligned}$$

En changeant k en $k+1$.

Comme Q est un polynôme de degré 1 dont α est une racine donc $Q = \frac{1}{n}(X - \alpha)$

On remplace ces deux expressions dans $P = QP'$.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 (X - \alpha) + a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + a_n (X - \alpha)^n \\ &= a(X - \alpha)[a_1 + 2a_2 (X - \alpha) + \dots + na_n (X - \alpha)^{n-1}] \\ &\Leftrightarrow a_0 + a_1 (X - \alpha) + a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + a_k (X - \alpha)^k + \dots + a_n (X - \alpha)^n \\ &= \frac{1}{n} a_1 (X - \alpha) + \frac{2}{n} a_2 (X - \alpha)^2 + \dots + \frac{k}{n} a_k (X - \alpha)^k \dots + a_n (X - \alpha)^n \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{2}{n} a_1 \\ \vdots \\ a_k = \frac{k+1}{n} a_k \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ \vdots \\ a_k = 0 \\ \vdots \\ a_n = a_n \end{cases} \end{aligned}$$

Donc

$$P = a_n (X - \alpha)^n$$

Deuxième méthode :

En dérivant $P = QP'$, et on rappelle que $Q' = \frac{1}{n}$

$$P' = Q'P' + QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{1}{n}P' + QP'' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP'' \Leftrightarrow P' = \frac{n}{n-1}QP''$$

Donc

$$P = QP' = \frac{n}{n-1}Q^2P''$$

En dérivant $\left(1 - \frac{1}{n}\right)P' = QP''$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)P'' = Q'P'' + QP''' = \frac{1}{n}P'' + QP''' \Leftrightarrow \left(1 - \frac{2}{n}\right)P'' = QP''' \Leftrightarrow P'' = \frac{n}{n-2}QP'''$$

Donc

$$P = \frac{n}{n-1}Q^2P'' = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}Q^3P'''$$

Pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. On montre par récurrence que

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)P^{(k)} = QP^{(k+1)}$$

Et que

$$P = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)} Q^{k+1} P^{(k+1)}$$

On dérive $\left(1 - \frac{k}{n}\right) P^{(k)} = Q P^{(k+1)}$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{k}{n}\right) P^{(k+1)} &= Q' P^{(k+1)} + Q P^{(k+2)} = \frac{1}{n} P^{(k+1)} + Q P^{(k+2)} \Leftrightarrow \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) P^{(k+1)} = Q P^{(k+2)} \\ &\Leftrightarrow P^{(k+1)} = \frac{n}{n-k-1} Q P^{(k+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)} Q^{k+1} P^{(k+1)} = \frac{n^k}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)} Q^{k+1} \frac{n}{n-k-1} Q P^{(k+2)} \\ &= \frac{n^{k+1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-k)(n-(k+1))} Q^{k+2} P^{(k+2)} \end{aligned}$$

Cette relation étant vraie au rang 0, elle est vraie pour tout $k \leq n-1$.

On l'applique au rang $n-1$:

$$P = \frac{n^{n-1}}{(n-1)(n-2)\dots(n-(n-1))} Q^n P^{(n)}$$

$P^{(n)} = n \times (n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \times a_n$ (ce qui est important c'est que c'est une constante).

Peu importe la constante, il est clair que $P = KQ^n$, comme Q est un polynôme de degré 1, on peut écrire ce polynôme sous la forme :

$$P = \lambda(X - \alpha)^n$$

Allez à : **Exercice 39**

Correction exercice 40.

1.

$$\frac{P(X)}{X^2} = \frac{2X^4 + 3X^3 - X^2 + 3X + 2}{X^2} = 2X^2 + 3X - 1 + \frac{3}{X} + \frac{2}{X^2}$$

Comme

$$Y^2 = X^2 + 2 + \frac{1}{X^2} \Rightarrow X^2 + \frac{1}{X^2} = Y^2 - 2$$

On a

$$\frac{P(X)}{X^2} = 2\left(X^2 + \frac{1}{X^2}\right) + 3\left(X + \frac{1}{X}\right) - 1 = 2(Y^2 - 2) + 3Y - 1 = 2Y^2 + 3Y - 5$$

Les racines de Q sont 1 et $-\frac{5}{2}$

Donc les racines de P vérifient

$$\begin{cases} X + \frac{1}{X} = 1 \\ X + \frac{1}{X} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 + 1 = X \\ X^2 + 1 = \frac{5}{2}X \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2 - X + 1 = 0 \\ X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0 \end{cases}$$

Les racines de $X^2 - X + 1 = 0$ sont

$$-j = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad -j^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Et celles de $X^2 - \frac{5}{2}X + 1 = 0$ sont

$$\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 2$$

On en déduit la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$

$$P(X) = 2\left(X - \frac{1}{2}\right)(X - 2)(X^2 - X + 1)$$

Et dans $\mathbb{C}[X]$

$$P(X) = 2 \left(X - \frac{1}{2} \right) (X - 2)(X + j)(X + j^2)$$

Allez à : **Exercice 40**

Correction exercice 41.

1. Comme $\sin(n\theta) \neq 0$, $d^\circ P = n$.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(k\theta) X^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{e^{ik\theta} - e^{-ik\theta}}{2i} X^k \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta} X^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{-ik\theta} X^k = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{i\theta} X)^k - \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{-i\theta} X)^k \\ &= \frac{1}{2i} (1 + e^{i\theta} X)^n - \frac{1}{2i} (1 + e^{-i\theta} X)^n \end{aligned}$$

Les racines $z \in \mathbb{C}$ de P vérifient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} (1 + e^{i\theta} z)^n - \frac{1}{2i} (1 + e^{-i\theta} z)^n &= 0 \Leftrightarrow (1 + e^{i\theta} z)^n = (1 + e^{-i\theta} z)^n \Leftrightarrow \left(\frac{1 + e^{i\theta} z}{1 + e^{-i\theta} z} \right)^n = 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \frac{1 + e^{i\theta} z}{1 + e^{-i\theta} z} &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, 1 + e^{i\theta} z = e^{\frac{2ik\pi}{n}} (1 + e^{-i\theta} z) \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, e^{i\theta} z - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} z &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \\ \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, z \left(e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \right) &= e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \end{aligned}$$

Il faut quand même vérifier que $e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} \neq 0$

$$\begin{aligned} e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} = 0 &\Leftrightarrow e^{2i\theta} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, 2\theta = \frac{2k\pi}{n} + 2l\pi \Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{Z}, \theta = \frac{k\pi}{n} + l\pi \Leftrightarrow \exists j \\ &\in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi + nl\pi \Leftrightarrow \sin(n\theta) = 0 \end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible d'après l'énoncé.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, z = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}$$

Les n racines de P sont les complexes $z_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}}$ avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$

2.

$$\begin{aligned} \overline{z_k} &= \frac{\overline{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} = \frac{e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} e^{i\theta}} = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} (e^{-\frac{2ik\pi}{n}} - 1)}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} (e^{-i\theta} - e^{-\frac{2ik\pi}{n}} e^{i\theta})} = \frac{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta} - e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}{e^{i\theta} - e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{-i\theta}} = z_k \end{aligned}$$

Donc ces complexes sont des réels.

Allez à : **Exercice 41**

Correction exercice 42.

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par $X-1$ puis $X=1$

$$a = \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)(X^2+1)} \right]_{X=1} = \frac{6+3-5}{2 \times 2} = 1$$

Je multiplie par $X + 1$ puis $X = -1$

$$b = \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X^2+1)} \right]_{X=-1} = \frac{-6 + 3 - 5}{-2 \times 2} = 2$$

Je multiplie par X , puis X tend vers l'infini.

$$6 = a + b + c, \text{ donc } c = 6 - 1 - 2 = 3$$

$$X = 0$$

$$5 = -5 + b + d \text{ donc } d = 5 + 1 - 2 = 4$$

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{3X+4}{X^2+1}$$

Allez à : **Exercice 42**

Correction exercice 43.

Le degré du numérateur est supérieur au degré du dénominateur, il faut diviser $X^4 - X + 2$ par

$$(X-1)(X^2-1) = X^3 - X^2 - X + 1$$

$$\begin{array}{r|l} X^4 & -X + 2 \\ \hline X^4 - X^3 - X^2 + X & \\ \hline X^3 + X^2 - 2X + 2 & \\ X^3 - X^2 - X + 1 & \\ \hline 2X^2 - X + 1 & \end{array}$$

$$F(X) = \frac{X^4 - X + 2}{(X-1)(X^2-1)} = X + 1 + \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)(X^2-1)}$$

On pose

$$G(X) = \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)(X^2-1)} = \frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)^2(X+1)} = \frac{a}{(X-1)^2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{X+1}$$

Je multiplie par $(X-1)^2$ puis $X = 1$

$$a = \left[\frac{2X^2 - X + 1}{X+1} \right]_{X=1} = \frac{2}{2} = 1$$

Je multiplie par $X + 1$ puis $X = -1$

$$c = \left[\frac{2X^2 - X + 1}{(X-1)^2} \right]_{X=-1} = \frac{4}{4} = 1$$

Je multiplie par X puis X tend vers l'infini.

$$2 = b + c \text{ donc } b = 1.$$

Donc

$$F(X) = X + 1 + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{X+1}$$

Allez à : **Exercice 43**

Correction exercice 44.

1. Il existe a, b, c et d tels que :

$$\frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par $(X-1)^2$, puis $X = 1$

$$b = \left[\frac{-X^2 + 2X + 1}{X^2+1} \right]_{X=1} = \frac{2}{2} = 1$$

Je multiplie par $X^2 + 1$, puis $X = i$

$$ci + d = \left[\frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2} \right]_{X=i} = \frac{-i^2 + 2i + 1}{(i-1)^2} = \frac{2 + 2i}{i^2 - 2i + 1} = \frac{2 + 2i}{-2i} = \frac{1+i}{-i} = -1 + i$$

Donc $c = 1$ et $d = -1$

Je multiplie par X , puis $X \rightarrow +\infty$

$$0 = a + c$$

Donc $a = -1$

$$\frac{-X^2 + 2X + 1}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{-1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{X-1}{X^2+1}$$

Autre méthode

On trouve $b = 1$ et $a + c = 0$ comme ci-dessus.

On prend $X = 0$

$$1 = -a + b + d \Leftrightarrow d = a$$

Puis on prend $X = -1$

$$-\frac{2}{4 \times 2} = -\frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{-c+d}{2}$$

On multiplie le tout par 2 et on remplace b par 1

$$-\frac{1}{2} = -a + \frac{1}{2} - c + d \Leftrightarrow -(a+c) + d = -1 \Leftrightarrow d = -1$$

D'où : $a = -1$ et $c = -a = 1$

2.

$$\begin{array}{r|l} X^3 & X^2 - 1 \\ X^3 - X & X \\ \hline X & \end{array}$$

Donc $X^3 = (X^2 - 1)X + X$ et

$$G(X) = \frac{(X^2 - 1)X + X}{X^2 - 1} = X + \frac{X}{(X-1)(X+1)}$$

Il existe a et b des réels tels que

$$\frac{X}{(X-1)(X+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$$

Je multiplie par $X - 1$, puis $X = 1$

$$a = \left[\frac{X}{X+1} \right]_{X=1} = \frac{1}{2}$$

Je multiplie par $X + 1$, puis $X = -1$

$$b = \left[\frac{X}{X-1} \right]_{X=-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

Donc

$$G(X) = X + \frac{\frac{1}{2}}{X-1} + \frac{\frac{1}{2}}{X+1}$$

Allez à : **Exercice 44**

Correction exercice 45.

1.

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1} + \frac{cX+d}{X^2+1}$$

Je multiplie par $X - 1$ puis $X = 1$

$$a = \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X+1)(X^2+1)} \right]_{X=1} = \frac{6+3-5}{2 \times 2} = 1$$

Je multiplie par $X + 1$ puis $X = -1$

$$b = \left[\frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X^2+1)} \right]_{X=-1} = \frac{-6 + 3 - 5}{-2 \times 2} = 2$$

Je multiplie par X , puis X tend vers l'infini.

$$6 = a + b + c, \text{ donc } c = 6 - 1 - 2 = 3$$

$$X = 0$$

$$5 = -5 + b + d \text{ donc } d = 5 + 1 - 2 = 4$$

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{3X+4}{X^2+1}$$

2. Il reste à décomposer dans $\mathbb{C}[X]$

$$\frac{3X+4}{X^2+1} = \frac{3X+4}{(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-i} + \frac{\bar{a}}{X+i}$$

Je multiplie par $X - i$, puis $X = i$.

$$a = \left[\frac{3X+4}{X+i} \right]_{X=i} = \frac{3i+4}{2i} = \frac{(3i+4)(-i)}{2} = \frac{3}{2} - 2i$$

Donc

$$F(X) = \frac{6X^3 + 3X^2 - 5}{(X-1)(X+1)(X^2+1)} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{X+1} + \frac{\frac{3}{2} - 2i}{X-i} + \frac{\frac{3}{2} + 2i}{X+i}$$

Allez à : **Exercice 45**

Correction exercice 46.

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{aX+b}{X^2+X+1} + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{(X-1)^2} \quad (*)$$

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X = 1$

$$d = \left[\frac{3}{X^2+X+1} \right]_{X=1} = 1$$

Première méthode

On multiplie par $X^2 + X + 1$, puis $X = j$

$$aj + b = \left[\frac{3}{(X-1)^2} \right]_{X=j} = \frac{3}{(j-1)^2} = \frac{3}{j^2 - 2j + 1} = \frac{3}{-3j} = -\frac{1}{j} = -j^2 = 1 + j$$

Donc $b = 1$ et $a = 1$

On prend $X = 0$ dans (*)

$$3 = b - c + d \Rightarrow c = -3 + b + d = -3 + 1 + 1 = -1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

Deuxième méthode

$X = 0$ dans (*)

$$3 = b - c + d \Leftrightarrow b - c = 3 - d = 2 \Leftrightarrow b = 2 + c$$

On multiplie par X , puis $X \rightarrow +\infty$

$$0 = a + c \Leftrightarrow a = -c$$

$X = -1$ dans (*)

$$\frac{3}{4} = -a + b - \frac{c}{2} + \frac{d}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = c + (2+c) - \frac{c}{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - 2 = \frac{3}{2}c \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = \frac{3}{2}c \Leftrightarrow c = -1$$

Et donc

$$\frac{3}{(X^2+X+1)(X-1)^2} = \frac{X+1}{X^2+X+1} - \frac{1}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2}$$

Pour la décomposition dans $\mathbb{C}(X)$, il suffit de décomposer $\frac{X+1}{X^2+X+1}$, comme

$$X^2 + X + 1 = (X - j)(X - j^2)$$

Il existe $A \in \mathbb{C}$ tel que

$$\frac{X + 1}{X^2 + X + 1} = \frac{X + 1}{(X - j)(X - j^2)} = \frac{A}{X - j} + \frac{\bar{A}}{X - j^2}$$

On multiplie par $X - j$, puis $X = j$

$$A = \left[\frac{X + 1}{X - j^2} \right]_{X=j} = \frac{j + 1}{j - j^2} = \frac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{X + 1}{X^2 + X + 1} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X - j} + \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X - j^2}$$

$$\frac{3}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X - j} + \frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6}}{X - j^2} - \frac{1}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2}$$

Allez à : **Exercice 46**

Correction exercice 47.

$$F = \frac{X^2 + 1 - 1}{(X^2 + 1)^{2010}} = \frac{X^2 + 1}{(X^2 + 1)^{2010}} - \frac{1}{(X^2 + 1)^{2010}} = \frac{1}{(X^2 + 1)^{2009}} - \frac{1}{(X^2 + 1)^{2010}}$$

Allez à : **Exercice 47**

Correction exercice 48.

Il faut d'abord diviser le numérateur par le dénominateur.

$$X^4(X - 1)^3 = X^4(X^3 - 3X^2 + 3X - 1) = X^7 - 3X^6 + 3X^5 - X^4$$

X^8	$+ X + 1$	$X^7 - 3X^6 + 3X^5 - X^4$
$X^8 - 3X^7 + 3X^6 - X^5$	$+ X + 1$	$X + 3$
$3X^7 - 3X^6 + X^5$	$+ X + 1$	
$3X^7 - 9X^6 + 9X^5 - 3X^4$	$+ X + 1$	
$6X^6 - 8X^5 + 3X^4$	$+ X + 1$	

$$\begin{aligned} \frac{X^8 + X + 1}{X^4(X - 1)^3} &= \frac{(X^7 - 3X^6 + 3X^5 - X^4)(X + 3) + 6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X - 1)^3} \\ &= X + 3 + \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X - 1)^3} \end{aligned}$$

On pose alors

$$G(X) = \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X - 1)^3}$$

0 est un pôle d'ordre 4 du dénominateur on effectue alors la division suivant les puissances croissantes de

$1 + X + 3X^4 - 8X^5 + 6X^6$ par $(X - 1)^3 = -1 + 3X - 3X^2 + X^3$ à l'ordre $4 - 1 = 3$

(Le 4 est le 4 de X^4)

$1 + X$	$+ 3X^4 - 8X^5 + 6X^6$	$-1 + 3X - 3X^2 + X^3$
$1 - 3X + 3X^2$	$- X^3$	$-1 - 4X - 9X^2 - 16X^3$
$4X - 3X^2$	$+ X^3 + 3X^4 - 8X^5 + 6X^6$	
$4X - 12X^2 + 12X^3 - 4X^4$		

$9X^2 - 11X^3 + 7X^4 - 8X^5 + 6X^6$
$9X^2 - 27X^3 + 27X^4 - 9X^5$
$16X^3 - 20X^4 + X^5 + 6X^6$
$16X^3 - 48X^4 + 48X^5 - 16X^6$
$28X^4 - 47X^5 + 22X^6$

On en tire

$$\begin{aligned}
 & 1 + X + 3X^4 - 8X^5 + 6X^6 \\
 &= (-1 + 3X - 3X^2 + X^3)(-1 - 4X - 9X^2 - 16X^3) + 28X^4 - 47X^5 + 22X^6 \\
 &\Leftrightarrow \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{(X-1)^3} \\
 &= \frac{(-1 + 3X - 3X^2 + X^3)(-1 - 4X - 9X^2 - 16X^3) + 28X^4 - 47X^5 + 22X^6}{(X-1)^3} \\
 &\Leftrightarrow \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{(X-1)^3} = -1 - 4X - 9X^2 - 16X^3 + \frac{28X^4 - 47X^5 + 22X^6}{(X-1)^3} \\
 &\Leftrightarrow \frac{6X^6 - 8X^5 + 3X^4 + X + 1}{X^4(X-1)^3} = \frac{-1 - 4X - 9X^2 - 16X^3}{X^4} + \frac{X^4(28 - 47X + 22X^2)}{X^4(X-1)^3} \\
 &\Leftrightarrow G = -\frac{1}{X^4} - \frac{4}{X^3} - \frac{9}{X^2} - \frac{16}{X} + \frac{28 - 47X + 22X^2}{(X-1)^3}
 \end{aligned}$$

On pose alors

$$H = \frac{28 - 47X + 22X^2}{(X-1)^3} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3}$$

On multiplie par $(X-1)^3$, puis $X = 1$.

$$c = [28 - 47X + 22X^2]_{X=1} = 3$$

On multiplie par X , puis $X \rightarrow +\infty$

$$22 = a$$

$X = 0$,

$$28 = -a + b - c \Leftrightarrow -28 = -22 + b - 3 \Leftrightarrow b = -33$$

Donc

$$H = \frac{28 - 47X + 22X^2}{(X-1)^3} = \frac{22}{X-1} + \frac{53}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^3}$$

Et alors

$$F = X + 3 - \frac{1}{X^4} - \frac{4}{X^3} - \frac{9}{X^2} - \frac{16}{X} + \frac{22}{X-1} - \frac{3}{(X-1)^2} + \frac{3}{(X-1)^3}$$

Allez à : **Exercice 48**

Correction exercice 49.

Le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, pas de division.

La forme de la décomposition est :

$$\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1} + \frac{eX + f}{(X^2 + X + 1)^2}$$

On multiplie par X^2 , puis $X = 0$.

$$b = \left[\frac{X^4 + 1}{(X^2 + X + 1)^2} \right]_{X=0} = 1$$

On multiplie par $(X^2 + X + 1)^2$, puis $X = j$.

$$ej + f = \left[\frac{X^4 + 1}{X^2} \right]_{X=j} = \frac{j^4 + 1}{j^2} = \frac{j + 1}{j^2} = \frac{-j^2}{j^2} = -1$$

Donc $e = 0$ et $f = -1$.

Ensuite ce n'est pas simple, il manque encore 3 coefficients.

On pourrait multiplier par X puis faire tendre X vers l'infini, mais ensuite il faudra prendre deux valeurs et bonjour les fractions pénibles, alors on va inaugurer une nouvelle technique qui sert dans des cas un peu compliqués.

$$\begin{aligned}\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} &= \frac{a}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1} + \frac{-1}{(X^2 + X + 1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2} &= \frac{a}{X} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}\end{aligned}$$

J'appelle

$$G = \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

C'est une fraction rationnelle, d'après l'unicité de sa décomposition en élément simple, qui est, d'après la ligne ci-dessus, $\frac{a}{X} + \frac{cX+d}{X^2+X+1}$, on doit pouvoir, en réduisant au même dénominateur, trouver que le dénominateur de G est $X(X^2 + X + 1)$. On y va.

$$\begin{aligned}G &= \frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} - \frac{1}{X^2} + \frac{1}{(X^2 + X + 1)^2} = \frac{X^4 + 1 - (X^2 + X + 1)^2 + X^2}{X^2(X^2 + X + 1)^2} \\ &= \frac{X^4 + X^2 + 1 - (X^4 + X^2 + 1 + 2X^3 + 2X^2 + 2X)}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{-2X^3 - 2X^2 - 2X}{X^2(X^2 + X + 1)^2} \\ &= \frac{-2}{X(X^2 + X + 1)}\end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{-2}{X(X^2 + X + 1)} = \frac{a}{X} + \frac{cX + d}{X^2 + X + 1}$$

On multiplie par X , puis $X = 0$

$$a = \left[\frac{-2}{X^2 + X + 1} \right]_{X=0} = -2$$

On multiplie par $X^2 + X + 1$, puis $X = j$.

$$cj + d = \left[\frac{-2}{X^2} \right]_{X=j} = \frac{-2}{j^2} = -2j$$

Donc $c = -2$ et $d = 0$

Finalement

$$\frac{X^4 + 1}{X^2(X^2 + X + 1)^2} = \frac{-2}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{-2X}{X^2 + X + 1} + \frac{-1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

Allez à : **Exercice 49**

Correction exercice 50.

Ensuite je diviserai par 16

$$\begin{aligned}F &= \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{16X^5}{(X - 1)^2(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2} \\ &= \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{(X + 1)^2} + \frac{e}{X - i} + \frac{f}{(X - i)^2} + \frac{\bar{e}}{X + i} + \frac{\bar{f}}{(X + i)^2}\end{aligned}$$

Avec a, b, c et d réels et e et f complexes.

Il est facile de trouver b, d et f .

Je multiplie par $(X - 1)^2$, puis $X = 1$

$$b = \left[\frac{16X^5}{(X + 1)^2(X - i)^2(X + i)^2} \right]_{X=1} = \left[\frac{16X^5}{(X + 1)^2(X^2 + 1)^2} \right]_{X=1} = 1$$

Je multiplie par $(X + 1)^2$, puis $X = -1$

$$d = \left[\frac{16X^5}{(X-1)^2(X-i)^2(X+i)^2} \right]_{X=1} = \left[\frac{16X^5}{(X-1)^2(X^2+1)^2} \right]_{X=-1} = -1$$

Je multiplie par $(X-i)^2$, puis $X=i$

$$f = \left[\frac{16X^5}{(X+1)^2(X-1)^2(X+i)^2} \right]_{X=1} = \left[\frac{16X^5}{(X^2-1)^2(X+i)^2} \right]_{X=i} = \frac{16i^5}{(-2)^2(2i)^2} = \frac{16i}{4(-4)} = -i$$

F est impaire donc $F(-X) = -F(X)$, soit encore : $-F(-X) = F(X)$

$$-F(-X) = -\left(\frac{a}{-X-1} + \frac{b}{(-X-1)^2} + \frac{c}{-X+1} + \frac{d}{(-X+1)^2} + \frac{e}{-X-i} + \frac{f}{(-X-i)^2} + \frac{\bar{e}}{-X+i} + \frac{\bar{f}}{(-X+i)^2} \right)$$

$$-F(-X) = \frac{a}{X+1} - \frac{b}{(X+1)^2} + \frac{c}{X-1} - \frac{d}{(X-1)^2} + \frac{e}{X+i} - \frac{f}{(X+i)^2} + \frac{\bar{e}}{X-i} - \frac{\bar{f}}{(X-i)^2}$$

En identifiant les coefficients avec ceux de $F(X)$, on a :

$$a = c, b = -d, e = \bar{e} \text{ et } f = -\bar{f}$$

$b = -d$, ça on le savait déjà, $e = \bar{e}$ donc e est réel et $f = -\bar{f}$ entraîne que f est un imaginaire pur, ce que l'on savait déjà.

$X=0$ donne

$$F(0) = 0 = -a + b + c + d + ie - f - i\bar{e} - \bar{f} = -a + c + i(e - \bar{e})$$

Car $b + d = 0$ et $-f - \bar{f} = i - i = 0$

Cela donne $0 = -a + c + i(e - \bar{e}) - a + c + 2i(\text{Im}(e)) = -a + c - 2\text{Im}(e)$

Or $a = c$ donc $\text{Im}(e) = 0$ autrement dit e est réel.

Je multiplie par X , puis je fais tendre X vers ∞ .

$$0 = a + c + e + \bar{e} = 2a + 2e$$

Donc $e = -a$

Comme $c = a, b = 1, d = -1$ et $f = -i$

On a :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{a}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{a}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{a}{X-i} - \frac{i}{(X-i)^2} - \frac{a}{X+i} + \frac{i}{(X+i)^2}$$

Ceci étant vrai pour tout $X \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1, -i, i\}$, je prends $X = 2$.

$$\frac{16 \times 32}{(16-1)^2} = \frac{a}{2-1} + \frac{1}{(2-1)^2} + \frac{a}{2+1} - \frac{1}{(2+1)^2} - \frac{a}{2-i} - \frac{i}{(2-i)^2} - \frac{a}{2+i} + \frac{i}{(2+i)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = a + 1 + \frac{a}{3} - \frac{1}{9} - \frac{a(2+i)}{5} - \frac{i(2+i)^2}{5^2} - \frac{a(2-i)}{5} + \frac{i(2-i)^2}{5^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{4a}{3} + \frac{8}{9} - \frac{4a}{5} - \frac{i(3+4i)}{25} + \frac{i(3-4i)}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{3^2 \times 5^2} = \frac{20-12}{15} a + \frac{8}{9} + \frac{8}{25}$$

$$\Leftrightarrow 16 \times 32 = 8 \times 15a + 8 \times 25 + 8 \times 9 \Leftrightarrow 2 \times 32 = 15a + 25 + 9 \Leftrightarrow 30 = 15a \Leftrightarrow a = 2$$

Donc

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2}{X-i} - \frac{i}{(X-i)^2} - \frac{2}{X+i} + \frac{i}{(X+i)^2}$$

Il reste à diviser par 16 :

$$\frac{X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\frac{1}{8}}{X-1} + \frac{\frac{1}{16}}{(X-1)^2} + \frac{\frac{1}{8}}{X+1} - \frac{\frac{1}{16}}{(X+1)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{X-i} - \frac{\frac{i}{16}}{(X-i)^2} - \frac{\frac{1}{8}}{X+i} + \frac{\frac{i}{16}}{(X+i)^2}$$

Ensuite pour décomposer dans $\mathbb{R}[X]$ il faut réunir les conjugués.

$$\begin{aligned} \frac{X^5}{(X^4-1)^2} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{X-i} + \frac{1}{X+i} \right) \\ &\quad - \frac{i}{16} \left(\frac{1}{(X-i)^2} - \frac{1}{(X+i)^2} \right) \\ \frac{X^5}{(X^4-1)^2} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{X}{4} - \frac{i}{16} \frac{(X+i)^2 - (X-i)^2}{(X^2+1)^2} \\ \frac{X^5}{(X^4-1)^2} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{X}{4} - \frac{i}{16} \frac{4iX}{(X^2+1)^2} \\ \frac{X^5}{(X^4-1)^2} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{X}{4} + \frac{X}{4} \end{aligned}$$

Je vais maintenant décomposer directement cette fraction dans $\mathbb{R}[X]$.

Comme dans $\mathbb{C}[X]$ je vais décomposer $F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2}$

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{\beta}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\delta}{(X+1)^2} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2+1} + \frac{\eta X + \theta}{(X^2+1)^2}$$

De la même façon, on trouve que $\beta = 1$ et $\delta = -1$

Je multiplie par $(X^2+1)^2$, puis je prends $X = i$

$$\eta i + \theta = \left[\frac{16X^5}{(X^2-1)^2} \right]_{X=i} = \frac{16i^5}{(-1-1)^2} = 4i$$

Donc $\eta = 4$ et $\theta = 0$.

F est impaire donc $-F(-X) = F(X)$

$$\begin{aligned} -F(-X) &= - \left(\frac{\alpha}{-X-1} + \frac{\beta}{(-X-1)^2} + \frac{\gamma}{-X+1} + \frac{\delta}{(-X+1)^2} + \frac{-\varepsilon X + \zeta}{X^2+1} + \frac{-\eta X + \theta}{(X^2+1)^2} \right) \\ &= \frac{\alpha}{X+1} - \frac{\beta}{(X+1)^2} + \frac{\gamma}{X-1} - \frac{\delta}{(X-1)^2} + \frac{\varepsilon X - \zeta}{X^2+1} + \frac{\eta X - \theta}{(X^2+1)^2} \\ -F(-X) = F(X) &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \beta = -\delta \\ \zeta = 0 \\ \theta = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On savait déjà que $\beta = -\delta$ et que $\theta = 0$.

Pour l'instant on en est à :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\alpha}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} + \frac{\varepsilon X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Je multiplie par X , puis on fait tendre X vers ∞ .

$$0 = \alpha + \gamma + \varepsilon$$

Comme $\alpha = \gamma$, on a $\varepsilon = -2\gamma$.

On peut essayer $X = 0$ mais cela redonne $\alpha = \gamma$.

Pour l'instant on en est à :

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{\gamma}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{\gamma}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{2\gamma X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Comme dans $\mathbb{C}[X]$, je vais prendre $X = 2$.

$$\begin{aligned} \frac{16 \times 32}{(16-1)^2} &= \gamma + 1 + \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{9} - \frac{4\gamma}{5} + \frac{8}{5^2} \Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{4\gamma}{3} - \frac{4\gamma}{5} + \frac{8}{9} + \frac{8}{25} \Leftrightarrow \frac{16 \times 32}{15^2} = \frac{8\gamma}{15} + \frac{8 \times 34}{9 \times 25} \\ &\Leftrightarrow 16 \times 32 = 8 \times 15\gamma + 8 \times 34 \Leftrightarrow 2 \times 32 = 15\gamma + 34 \Leftrightarrow \gamma = 2 \end{aligned}$$

$$F(X) = \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{2}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{2}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} - \frac{4X}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2}$$

On divise par 16 et voilà.

A partir de là, on peut retrouver la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$, pour cela il suffit de décomposer

$$\frac{4X}{X^2 + 1} = \frac{a}{X - i} + \frac{\bar{a}}{X + i}$$

Et

$$\frac{4X}{(X^2 + 1)^2} = \frac{b}{X - i} + \frac{\bar{b}}{X + i} + \frac{c}{(X - i)^2} + \frac{\bar{c}}{(X + i)^2}$$

A faire.

Troisième méthode

On repart de

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

On va calculer

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(X - 1)^2} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(X + 1)^2(X^2 + 1)^2 - (X - 1)^2(X^2 + 1)^2 + 4X(X - 1)^2(X + 1)^2}{(X - 1)^2(X + 1)^2(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{((X + 1)^2 - (X - 1)^2)(X^2 + 1)^2 + 4X(X^2 - 1)^2}{(X^2 - 1)^2(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{(X^2 + 2X + 1 - X^2 + 2X - 1)(X^4 + 2X^2 + 1) + 4X(X^4 - 2X^2 + 1)}{(X^4 - 1)^2} \\ &= \frac{4X(X^4 + 2X^2 + 1) + 4X(X^4 - 2X^2 + 1)}{(X^4 - 1)^2} = \frac{8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} F &= \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{1}{(X - 1)^2} + \frac{\gamma}{X + 1} - \frac{1}{(X + 1)^2} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{4X}{(X^2 + 1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} + \frac{8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} \Leftrightarrow F - \frac{8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} \\ &= \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{16X^5}{(X^4 - 1)^2} - \frac{8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{16X^5 - 8X(X^4 + 1)}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{16X^5 - 8X^5 - 8X}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{8X^5 - 8X}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{8X(X^4 - 1)}{(X^4 - 1)^2} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{8X}{X^4 - 1} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \\ &\Leftrightarrow \frac{8X}{(X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)} = \frac{\alpha}{X - 1} + \frac{\gamma}{X + 1} + \frac{\varepsilon X + \zeta}{X^2 + 1} \end{aligned}$$

On multiplie par $X - 1$, puis $X = 1$

$$\alpha = \left[\frac{8X}{(X+1)(X^2+1)} \right]_{X=1} = 2$$

On multiplie par $X+1$, puis $X=-1$

$$\beta = \left[\frac{8X}{(X-1)(X^2+1)} \right]_{X=-1} = 2$$

On multiplie par X^2+1 , puis $X=i$

$$\epsilon + i\zeta = \left[\frac{8X}{X^2-1} \right]_{X=i} = -4i \Rightarrow \epsilon = 0 \text{ et } \zeta = -4$$

Donc

$$\frac{\alpha}{X-1} + \frac{\gamma}{X+1} + \frac{\epsilon X + \zeta}{X^2+1} = \frac{2}{X-1} + \frac{2}{X+1} - \frac{4X}{X^2+1}$$

Et enfin

$$F = \frac{16X^5}{(X^4-1)^2} = \frac{2}{X-1} + \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{2}{X+1} - \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{4X}{X^2+1} + \frac{4X}{(X^2+1)^2}$$

Il ne reste qu'à diviser par 16

Allez à : [Exercice 50](#)

Correction exercice 51.

1. α est une racine simple de Q donc il existe Q_1 tel que $Q = (X-\alpha)Q_1$ avec $Q_1(\alpha) \neq 0$

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{P}{(X-\alpha)Q_1} = \frac{a}{X-\alpha} + \dots$$

En multipliant par $X-\alpha$, puis en faisant $X=\alpha$, on trouve (classiquement)

$$a = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

D'autre part

$$Q = (X-\alpha)Q_1 \Rightarrow Q' = Q_1 + (X-\alpha)Q_1'$$

En faisant $X=\alpha$ dans cette dernière expression on trouve que $Q'(\alpha) = Q_1(\alpha)$

Par conséquent

$$a = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

2.

$$X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

Donc il existe a_0, a_1, \dots, a_{n-1} tels que :

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

En appliquant le résultat du 1°), avec $P = X$ et $Q' = nX^{n-1}$

$$a_k = \frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{n \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)^{n-1}} = \frac{1}{n} e^{\frac{2ik(1-(n-1))\pi}{n}} = \frac{1}{n} e^{\frac{2ik(2-n)\pi}{n}} = \frac{1}{n} e^{\frac{4ik\pi}{n}}$$

Donc

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{n} e^{\frac{4ik\pi}{n}}}{X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}}$$

Allez à : [Exercice 51](#)

Correction exercice 52.

1. $P = X^5 - X^3 + X^2 - 1 = X^3(X^2 - 1) + (X^2 - 1) = (X^2 - 1)(X^3 + 1)$
 -1 est racine de $X^3 + 1$ donc on peut factoriser par $X + 1$, et on trouve, à l'aide d'une division élémentaire $X^3 + 1 = (X + 1)(X^2 - X + 1)$. $X^2 - X + 1$ n'a pas de racine réelle

On déduit de tout cela que la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ est :

$$P = (X - 1)(X + 1)(X + 1)(X^2 - X + 1) = (X - 1)(X + 1)^2(X^2 - X + 1)$$

$X^2 - X + 1$ admet deux racines complexes conjuguées

$$\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -j \quad \text{et} \quad \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -j^2$$

La décomposition dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = (X - 1)(X + 1)^2(X + j)(X + j^2)$$

2. Il existe a, b, c et d réels tels que :

$$\begin{aligned} \frac{X + 1}{P} &= \frac{X + 1}{(X - 1)(X + 1)^2(X^2 - X + 1)} = \frac{1}{(X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)} \\ &= \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{X + 1} + \frac{cX + d}{X^2 - X + 1} \end{aligned}$$

On multiplie par $X - 1$, puis $X = 1$

$$a = \left[\frac{1}{(X + 1)(X^2 - X + 1)} \right]_{X=1} = \frac{1}{2}$$

On multiplie par $X + 1$, puis $X = -1$

$$b = \left[\frac{1}{(X - 1)(X^2 - X + 1)} \right]_{X=-1} = -\frac{1}{6}$$

On pose $X = 0$

$$-1 = -a + b + d \Rightarrow d = -1 + a - b = -1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

On multiplie par X , puis X tend vers l'infini

$$0 = a + b + c \Rightarrow c = -a - b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{X + 1}{P} = \frac{\frac{1}{2}}{X - 1} - \frac{\frac{1}{6}}{X + 1} + \frac{-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3}}{X^2 - X + 1}$$

Allez à : **Exercice 52**