Université Claude Bernard-Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
Fondamentaux des mathématiques 2

Seconde chance du 21 juin 2021-durée 2h

Attention à la rédaction, pas de téléphone portable ni de calculatrice, on ne sort que une heure après le début de l'examen.

Exercice 1.

a. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et $f: E \to F$ une application linéaire.
Donner la définition du noyau $\ker(f)$.

b. Montrer que le noyau est un sous-espace vectoriel de E.

Correction exercice 1

a. $\ker(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\}$.

b. Pour toute application linéaire $f(0_E) = 0_F$ donc $0_F \in \ker(f)$
Soient $x, x' \in \ker(f)$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, on a donc $f(x) = 0_F$ et $f(x') = 0_F$
$$f(\lambda x + \lambda x') = \lambda f(x) + \lambda' f(x')$$
Car f est linéaire, donc
$$f(\lambda x + \lambda x') = \lambda \times 0_F + \lambda' \times 0_F = 0_F$$
Ce qui montre que $\lambda x + \lambda x' \in \ker(f)$.
Conclusion $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 2.

a. Calculer la valeur de $I = \int_0^1 \ln(1+x)\, dx$

b. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par
$$u_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\right) - \ln(n)$$
Exprimer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ en fonction de I.
Indication : on pourra utiliser une somme de Riemann.
Calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Correction exercice 2

a. Par intégration par parties
$I = \int_0^1 1 \times \ln(1+x)\, dx$
$u'(x) = 1$ $u(x) = x$
$v(x) = \ln(1+x)$ $v'(x) = \frac{1}{1+x}$
$I = [x\ln(1+x)]_0^1 -$ $\int_0^1 \frac{x}{1+x} dx$
Donc
$$I = [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1+x-1}{1+x} dx = [x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx$$
$$= \ln(2) - [x - \ln(1+x)]_0^1 = \ln(2) - 1 + \ln(2) = 2\ln(2) - 1$$
Remarque : si on est malin, on peut prendre $u(x) = x + 1$, qui est aussi une primitive de la fonction constante égale à 1 (cela simplifie un peu les calculs).

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)\right) - \ln(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) - \ln(n)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) - \ln(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(n) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) - \ln(n)$$
$$= \frac{\ln(n)}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) - \ln(n) = \frac{\ln(n)}{n}n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) - \ln(n)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} I$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2\ln(2) - 1$.

Exercice 3.

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :

$$F(X) = \frac{-1}{(X-2)^2(X-3)}$$

b. En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{-1}{(t-2)^2(t-3)}\,dt$$

Correction exercice 3

a. Il existe a, b et c réels tels que

$$\frac{-1}{(X-2)^2(X-3)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{(X-2)^2} + \frac{c}{X-3} \qquad (*)$$

On multiple par $(X-2)^2$, puis $X=2$

$$b = \left[\frac{-1}{X-3}\right]_{X=2} = \frac{-1}{-1} = 1$$

On multiplie par $X-3$, puis $X=3$

$$c = \left[\frac{-1}{(X-2)^2}\right]_{X=3} = \frac{-1}{(3-2)^2} = -1$$

On multiplie $(*)$ par X, puis X tend vers $+\infty$.

$$0 = a + c \Rightarrow a = 1$$

On a donc

$$\frac{-1}{(X-2)^2(X-3)} = \frac{1}{X-2} + \frac{1}{(X-2)^2} + \frac{-1}{X-3}$$

b.

$$\int_0^1 \frac{-1}{(t-2)^2(t-3)}\,dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t-2} + \frac{1}{(t-2)^2} + \frac{-1}{t-3}\right)dt = \int_0^1 \frac{dt}{t-2} + \int_0^1 \frac{dt}{(t-2)^2} - \int_0^1 \frac{dt}{t-3}$$
$$= [\ln|t-2|]_0^1 - \left[\frac{1}{t-2}\right]_0^1 - [\ln|t-3|]_0^1$$
$$= \ln(1) - \ln(2) - \left(\frac{1}{-1} - \frac{1}{-2}\right) - (\ln(2) - \ln(3) = \ln(3) - 2\ln(2) + \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

Exercice 4.

a. Trouver $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, en déduire $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$.

b. Soit $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, trouver $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = \sin(t)$. En déduire $\arcsin(\sin(x))$.

c. Soit $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, déterminer la dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\sin(x))$.

Correction exercice 4

a. $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ donc $\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) = \frac{5\pi}{12}$ car $\frac{5\pi}{12} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12}\right]$.

b. Comme $\sin(x) = \sin(\pi - x)$, et que

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3\pi}{2} \leq -x \leq -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \pi - x \leq \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que

$$\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(sin(\pi - x)) = \pi - x$$

c. D'après la question précédente, pour $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, $f'(x) = -1$.

Exercice 5.

Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' + y = \frac{1}{1+x^2}$$

Correction exercice 5

Equation homogène : $xy' + y = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, xy' + y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, \ln|y| = -\ln(x) + K \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, y = \lambda e^{-\ln(x)} = \frac{\lambda}{x}$$

Recherche d'une solution particulière de la forme

$$y_P = \frac{\lambda(x)}{x} = \lambda(x) \times \frac{1}{x}$$

$$y_P' = \lambda'(x) \times \frac{1}{x} + \lambda(x) \times \frac{-1}{x^2}$$

$$xy_P' + y_P = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow x\left(\lambda'(x) \times \frac{1}{x} + \lambda(x) \times \frac{-1}{x^2}\right) + \lambda(x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda'(x) + \lambda(x) \times \frac{-1}{x} + \lambda(x) \times \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x^2} \Leftrightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$\lambda(x) = \arctan(x)$ convient, une solution particulière est donc

$$y_P = \frac{\arctan(x)}{x}$$

Et la solution générale de l'équation est :

$$y = \frac{\lambda}{x} + \frac{\arctan(x)}{x}$$

Exercice 6.

Soit $\beta = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$u(e_1) = -3e_1 + 2e_2 - 4e_3$

$u(e_2) = e_1 - e_2 + 2e_3$

$u(e_3) = 4e_1 - 2e_2 + 5e_3$

1. Déterminer la matrice de u dans la base canonique.
2. Montrer que $E = \{x \in \mathbb{R}^3, u(x) = x\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Montrer que la dimension de E est 1 et donner un vecteur non nul a de E.
3. Montrer que $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Donner une base (b, c) de F.
4. Montrer que $\beta' = (a, b, u(b))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Montrer que $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. Déterminer la matrice R de u dans la base β'.

Correction exercice 6

1. $A = Mat_\beta(u) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$
2. $x = (x_1, x_2, x_3) \in E \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 4x_3 = x_1 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ 4L_2 + L_1 \\ 2L_3 - L_1 \end{matrix} \begin{cases} -4x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ -3x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$
   $\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$
   $$x = (x_1, 0, x_1) = x_1(1,0,1)$$
   On pose $a = (1,0,1)$
   Donc $E = \text{Vect}(a)$ E est donc un espace vectoriel et bien sûr $\dim(E) = 1$
3. $$x = (x_1, x_2, x_3) \in F \Leftrightarrow x = \left(x_2 + \frac{3}{2}x_3, x_2, x_3\right) = x_2(1,1,0) + \frac{x_3}{2}(3,0,2)$$
   On pose $b = (1,1,0)$ et $c = (3,0,2)$ donc $F = \text{Vect}(b, c)$, c'est un espace vectoriel.
   (b, c) est une famille génératrice de F formée de deux vecteurs non proportionnels, cette famille est donc libre.
   Une base de F est (b, c).
4. $u(b)$ a pour coordonnées :
   $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
   Soit α, β et γ trois réels
   $$\alpha a + \beta b + \gamma u(b) = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \alpha(1,0,1) + \beta(1,1,0) + \gamma(-2,1,-2) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\gamma = 0 \end{cases}$$
   $$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\gamma - \gamma - 2\gamma = 0 \\ \beta = -\gamma \\ \alpha = 2\gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$
   $\big(a, b, u(b)\big)$ est une famille libre à trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3, donc $\big(a, b, u(b)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. $\dim(E) + \dim(F) = 1 + 2 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$
   $(1,0,1) \notin F$ car $-2 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 1 = 1 \neq 0$ donc $E \cap F = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
   Donc $E \oplus F = \mathbb{R}^3$.
6. $u\big(u(b)\big)$ a pour coordonnées
   $$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
   Donc $u\big(u(b)\big) = -b$
   $$Mat_{\beta'}(u) = \begin{array}{c c} \begin{matrix} u(a) & u(b) & u(u(b)) \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} a \\ b \\ u(b) \end{matrix} \end{array}$$