Contrôle final automne 2021

Exercice 1.

1. Soient A et B deux polynômes à coefficients réels avec $B \neq 0$. Enoncer le théorème de division euclidienne de A par B.
2. Dans cette question $A = (X-3)^{12} + (X-2)^6 - 2$ et $B = (X-3)(X-2)$. Soit R le reste de la division de A par B.
   a. Justifier que R est de la forme $R = aX + b$, avec a et b dans $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer $R(2)$ et $R(3)$, en déduire une expression des coefficients a et b de $\mathbb{R}$.
3. On revient à la situation générale de la première question et on note R le reste de la division euclidienne de A par B.
   Soit α un réel. Montrer que $A(\alpha) = B(\alpha) = 0$ si et seulement si $B(\alpha) = R(\alpha) = 0$.
4. Soit $p \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. On suppose maintenant que $A = X^3 + pX + q$.
   a. Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par A' (son polynôme dérivé).
   b. On suppose que α est racine au moins double de A. Montrer que $\alpha = -\frac{3q}{2p}$.
   c. En déduire que A admet une racine au moins double si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Exercice 2.

1. Calculer $pgcd(741{,}351)$ et trouver des coefficients de Bézout associé aux entiers 741 et 351.
2. Donner toutes les solutions du système de congruence
$$x \equiv 7 \mod(19) \qquad \text{et} \qquad x \equiv 13 \mod(25)$$

Exercice 3.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + (1-3i)z - 4 - 3i = 0$
2. Donner l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie $\left|\frac{z-1}{z-4}\right| = 2$

Exercice 4.

Soient deux réels a et b tels que $0 < a < b$. On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et pour tout entier n ,
$$u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1.
   a. Montrer que pour tout $x > 0$ et $y > 0$ on a, $\frac{2xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{2}$.
   b. En déduire que pour tout entier n, on a $u_n \leq v_n$ (on pourra utiliser sans démonstration le fait que $u_n > 0$ et $v_n > 0$ pour tout entier n).
2. Pour tout entier n, on pose $w_n = v_n - u_n$.
   a. Montrer que pour tout entier n, on a $w_{n+1} \leq \frac{w_n}{2}$.
   b. En déduire que la suite (w_n) tend vers 0.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones. En déduire qu'elles convergent vers le même réel l.
4. Déterminer l (Indication : calculer $u_n v_n$).

Exercice 5. On cherche à étudier la fonction $f(x) = e^{\frac{1}{\ln(x)}}$.

1. Donner le domaine maximal de f, c'est-à-dire le plus grand ensemble de nombre x tel que $f(x)$ est défini, que l'on note D_f.
2. Calculer la fonction dérivée de f et déterminer son signe.
3. Calculer les limites de f aux bords de D_f.
4. Donner la table de variation de f.
5. Tracer le graphe de f, en indiquant ses asymptotes.