

Exercice 1.

1. Donner les valeurs complexes qui vérifient $z^{2n+1} + 1 = 0$
2. Résoudre dans \mathbb{C} , l'équation

$$1 - z + z^2 - z^3 + \dots - z^{2n-1} + z^{2n} = 0$$

Correction exercice 1

1. Soit $z \in \mathbb{C}$

$$z^{2n+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow z^{2n+1} = -1 \Leftrightarrow z^{2n+1} = e^{i\pi} \Leftrightarrow z^{2n+1} = \left(e^{\frac{i\pi}{2n+1}} \right)^{2n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{2n+1}}} \right)^{2n+1} = 1$$

Les valeurs de $\frac{z}{e^{\frac{i\pi}{2n+1}}}$ sont les racines $2n + 1$ -ième de 1, c'est-à-dire

$$e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$$

On en déduit que les solutions de $z^{2n+1} + 1 = 0$ sont

$$e^{\frac{i\pi}{2n+1}} e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, 2n\}$$

2. Soit $z \in \mathbb{C}$

$$1 - z + z^2 - z^3 + \dots - z^{2n-1} + z^{2n} = 1 + (-z) + (-z)^2 + (-z)^3 + \dots + (-z)^{2n-1} + (-z)^{2n}$$

Alors pour $z \neq -1$

$$1 - z + z^2 - z^3 + \dots - z^{2n-1} + z^{2n} = \frac{1 - (-z)^{2n+1}}{1 - (-z)} = \frac{1 + z^{2n+1}}{1 + z}$$

Ce sont les complexes que l'on a trouvé à la première question où il faut enlever la solution -1 , c'est-à-dire $k = 2n$, car $e^{\frac{(2n+1)i\pi}{2n+1}} = e^{i\pi} = -1$.

Les solutions de l'équation sont

$$e^{\frac{(2k+1)i\pi}{2n+1}}, k \in \{0, 1, \dots, 2n - 1\}$$

Exercice 2.

1. Sans les calculer, montrer l'existence de deux entiers relatifs a et b dans \mathbb{Z} pour lesquels

$$13a + 10b = 1$$

2. Expliciter deux entiers relatifs a et b dans \mathbb{Z} , pour lesquels $13a + 10b = 1$.
3. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 , l'équation suivante, d'inconnue (x, y) : $13x + 10y = 1$
4. Résoudre dans \mathbb{Z} , l'équation suivante, d'inconnue u : $20u \equiv 2 \pmod{13}$.

Correction exercice 2

1. 13 et 10 sont premiers entre eux, il existe une relation de Bézout entre 13 et 10.

2. Soit on utilise l'algorithme d'Euclide, soit on remarque que

$$13 \times 7 + 10 \times (-9) = 1$$

3. On note (L_1) :

$$13 \times 7 + 10 \times (-9) = 1$$

Et (L_2)

$$13x + 10y = 1$$

Alors $(L_2) - (L_1)$ donne

$$13(x - 7) + 10(y + 9) = 0$$

Ce qui équivaut à

$$13(x - 7) = -10(y + 9) \quad (L_3)$$

13 divise $-10(y + 9)$ et 13 est premier avec 10, d'après le lemme de Gauss, 13 divise $-(y + 9)$, il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-(y + 9) = 13k$, ce qui s'écrit aussi

$$y = -9 - 13k$$

La réciproque est évidente. On remplace $-(y + 9) = 13k$ dans (L_3) , cela donne

$$13(x - 7) = 10 \times 13k$$

On simplifie par 13, et on trouve que $x = 7 + 10k$, l'ensemble des solutions est

$$(7 + 10k, -9 - 13k), k \in \mathbb{Z}$$

4. Première méthode

$$20u \equiv 2 \pmod{13} \Leftrightarrow 10u \equiv 1 \pmod{13}$$

Car 2 et 13 sont premiers entre eux.

On multiplie par -9 . Et d'après la question 1. : $-9 \times 10 \equiv 1 - 7 \times 13 \equiv 1 \pmod{13}$

Donc

$$20u \equiv 2 \pmod{13} \Leftrightarrow -9 \times 10u \equiv -9 \pmod{13} \Leftrightarrow u \equiv -9 \pmod{13}$$

Seconde méthode

Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tel que $20u = 2 + 13l$, ce qui équivaut à

$$20u - 13l = 2$$

D'après la question 3.

$$13x + 10y = 1 \Leftrightarrow 13 \times (2x) + 20y = 2 \Leftrightarrow 20y - 13 \times (-2x) = 2$$

A pour solution

$$(7 + 10k, -9 - 13k), k \in \mathbb{Z}$$

Donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $u = -9 - 13k$, autrement dit $u \equiv -9 \pmod{13}$.

Exercice 3.

Soit f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

1. Déterminer les réels tels que f est continue.
2. Déterminer les réels tels que f est dérivable.

Correction exercice 3

1. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ f est continue et dérivable.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 - x^2) = 0 = f(1)$$

Donc f est continue en 1.

f est continue sur \mathbb{R} .

Pour $x < 0$, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$, on cherche sa limite en 0^- si elle existe, on vérifie sans peine qu'il s'agit

d'une forme indéterminée. On pose $X = \frac{1}{x^2}$, donc $x = -\frac{1}{\sqrt{X}}$

$$f'(x) = 2(-\sqrt{X})^3 e^{-X} = -2X^{\frac{3}{2}} e^{-X}$$

Il s'agit toujours d'une forme indéterminée, mais par croissance comparée la limite est nulle.

Pour $0 < x < 1$, $f'(x) = 3x^2 - 2x$, sa limite en 0^+ est nulle

On en conclut que f est dérivable en 0 et que sa dérivée vaut 0.

En 1^- la limite de $f'(x)$ est $3 - 2 = 1$, et on 1^+ , la dérivée vaut 0 donc tend vers 0, qui est différent de

1. f n'est pas dérivable en 1.

Exercice 4.

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, et $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$

1. Calculer j^3 puis montrer que $j^2 + j + 1 = 0$
2. Montrer que P admet deux racines réelles évidentes.

3. Montrer que j est une racine multiple de P
4. Déterminer le degré de P ainsi que son coefficient dominant.
5. Expliciter les décompositions en facteurs irréductibles de P , d'abord dans $\mathbb{C}[X]$, et ensuite dans $\mathbb{R}[X]$.

Correction exercice 4

$$1. j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1 \text{ et comme } j \neq 1, 1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = 0.$$

$$2. P(0) = 1^7 - 0^7 - 1 = 0 \text{ et } P(-1) = 0^7 - (-1)^7 - 1 = 1 - 1 = 0$$

0 et -1 sont deux racines réelles évidentes.

3. On remarque que $j^4 = j, j^5 = j^2, j^6 = 1$ etc.

$$P(j) = (1+j)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j \times j^6 - 1 = -j^{14} - j - 1 = -j^2 \times (j^3)^4 - j - 1$$

$$= -j^2 - j - 1 = 0$$

$$P' = 7(X+1)^6 - 7X^6$$

$$P'(j) = 7(j+1)^6 - 7j^6 = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(1-1) = 0$$

Cela montre que j est une racine au moins double de P .

4. $P = X^7 + 7X^6 + \dots - X^7 - 1 = 7X^6 + \dots$ donc le degré de P est 6 et son coefficient dominant est 7.

5. Comme $j^2 = \bar{j}$ et que le polynôme est à coefficients réels, j^2 est aussi une racine au moins double de P . En comptant la multiplicité des racines on a 6 racines $0, -1, j, j^2, j^2, j^2$, comme le polynôme est de degré 6 donc il n'y en a pas plus.

$$P = 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2$$

C'est la décomposition dans $\mathbb{C}[X]$.

Et dans $\mathbb{R}[X]$

$$P = 7X(X+1)((X-j)(X-j^2))^2 = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$

$$\text{Car } (X-j)(X-j^2) = X^2 - jX - j^2X + j^3 = X^2 + (-j-j^2)X + 1 = X^2 + X + 1.$$

Exercice 5.

On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ les suites réelles respectivement définies par

$$u_n = 2\sqrt{n} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \quad \text{et} \quad v_n = 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

La numérotation commence à 1 ; les termes u_0 et v_0 ne sont pas définis.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que $v_n - u_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
- 3.

a. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a l'inégalité

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

b. En déduire que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. Les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles convergentes ?

Correction exercice 5

1. Pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2(n+1) - 2\sqrt{n(n+1)} - 1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+1 - 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \\
&= \frac{(2n+1)^2 - 4n(n+1)}{\sqrt{n+1}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})} = \frac{4n^2+4n+1-4n^2-4n}{\sqrt{n+1}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})} > 0
\end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

2. Pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
v_n - u_n &= 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - \left(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2 \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\
&= 2 \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

3.

a.

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{(n+2) - (n+1)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

b.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \left(2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right) \\
&= 2\sqrt{n+2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \\
&= 2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0
\end{aligned}$$

Donc la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

4. D'après le théorème des suites adjacentes, c'est-à-dire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante et la différence tend vers 0, les deux suites sont convergentes.

Exercice 6.

On note f l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans \mathbb{R}^2 définie par :

$$f(P) = (P(1), P(2)).$$

1.

a. Soit a et b deux réels. Calculer $f(a(X-1) + b(X-2))$.

b. Montrer que l'application est surjective.

2. On note (E_0) l'équation suivante, d'inconnue P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(E_0) \quad f(P) = (0,0)$$

a. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $(X-1)(X-2)$ divise P alors P est solution de (E_0) .

b. Montrer, réciproquement, que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si P est une solution de (E_0) , alors $(X-1)(X-2)$ divise P .

On pourra utiliser la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$.

c. Quelles sont les solutions de (E_0) ?

3. Résoudre l'équation suivante, d'inconnue P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(E) \quad f(P) = (-1,4)$$

On pourra utiliser les deux questions précédentes.

4. Pour chaque entier d , entier naturel, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à d et on note f_d la restriction de f , de l'ensemble $\mathbb{R}_d[X]$ vers \mathbb{R}^2 .
- Pour quelles valeurs de d l'application est-elle surjective ?
 - Pour quelles valeurs de d l'application est-elle injective ?

Correction exercice 6

- $f(a(X-1) + b(X-2)) = (-b, a)$
 - Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe $a = y$ $b = -x$ tels que

$$f(y(X-1) - x(X-2)) = (x, y)$$

f est surjective.
- On suppose qu'il existe un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$ tel que

$$P = (X-1)(X-2)Q$$

Alors

$$P(1) = 0 \quad \text{et} \quad P(2) = 0$$

Donc P vérifie (E_0) .
 - D'après la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$ qu'il existe un unique couple de polynôme Q et R , avec $d^\circ R < 2$ tels que

$$P = (X-1)(X-2)Q + R$$

Première méthode

On teste cette égalité pour $X = 1$ et $X = 2$, on a $P(1) = 0$ et $P(2) = 0$ et la partie en $(X-1)(X-2)Q$ s'annule donc

$$\begin{cases} R(1) = 0 \\ R(2) = 0 \end{cases}$$

Comme le degré de R est inférieur ou égal à 1, ce polynôme est nul.

Seconde méthode

Comme le degré de R est inférieur ou égal à 1, il existe α et β réels tels que

$$R = \alpha X + \beta$$

On teste P sur 1 et sur 2, la partie en $(X-1)(X-2)Q$ s'annule donc

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

On voit sans peine que $\alpha = \beta = 0$. R est donc le polynôme nul, ce qui montre que $P = (X-1)(X-2)Q$, c'est-à-dire que $(X-1)(X-2)$ divise P .
 - D'après les deux points précédents P vérifie (E_0) si et seulement si $(X-1)(X-2)$ divise P , l'ensemble des solutions de (E_0) sont les multiples de $(X-1)(X-2)$.
- D'après la première question $P_1 = 4(X-1) + (X-2)$ est une solution particulière de (E) Montrons que P est une solution de (E) équivaut à $P - P_1$ est une solution de (E_0) P est une solution de (E) si et seulement si $f(P) = (-1, 4) = f(P_1)$ si et seulement si $(P(1), P(2)) = (P_1(1), P_1(2))$ si et seulement si $((P - P_1)(1), (P - P_1)(2)) = (0, 0)$ D'après la question 2. $P - P_1$ est un multiple de $(X-1)(X-2)$, l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des polynômes de la forme

$$(X-1)(X-2)Q + 4(X-1) + (X-2)$$

Où Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Autre méthode : utiliser les congruences de polynômes modulo $(X-1)(X-2)$
- Si $d \geq 1$, d'après la question 1. n'importe couple de \mathbb{R}^2 admet un antécédent, donc f_d est surjective. Pour $d = 0$ ou $d = -\infty$ (c'est-à-dire les polynômes constants égal à $\alpha \in \mathbb{R}$) $f(P) = (\alpha, \alpha)$, ces couples ne couvrent pas \mathbb{R}^2 . Donc f_d n'est pas surjective.

b. Si $d \geq 2$, soit $P_1 = (X - 1)(X - 2)Q_1$ et $P_2 = (X - 1)(X - 2)Q_2$ avec Q_1 et Q_2 dans $\mathbb{R}_{d-2}[X]$ distincts.

On a $f_d(P_1) = f_d(P_2)$ (égal à $(0,0)$) et $P_1 \neq P_2$ donc f n'est pas injective

Si $d \leq 1$

Première méthode

Soit P_1 et P_2 deux polynômes tels que $f_d(P_1) = f_d(P_2)$

il existe α_1 et β_1 réels tels que

$$P_1 = \alpha_1 X + \beta_1$$

et α_2, β_2 réels tels que

$$P_2 = \alpha_2 X + \beta_2$$

Comme $f(P_i) = (\alpha_i + \beta_i, 2\alpha_i + \beta_i)$ pour $i \in \{1,2\}$

On a alors

$$f_d(P_1) = f_d(P_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 2\alpha_2 + \beta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \alpha_2 \\ \beta_1 = \beta_2 \end{cases}$$

Donc $P_1 = P_2$ et alors f est injective.

Seconde méthode

Soit P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ tels que

$$f_d(P_1) = f_d(P_2) \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(1) = P_2(1) \\ P_1(2) = P_2(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P_1 - P_2)(1) = 0 \\ (P_1 - P_2)(2) = 0 \end{cases}$$

Le polynôme $P_1 - P_2 \in \mathbb{R}_1[X]$ et il admet deux racines distinctes, il est donc nul, par conséquent $P_1 = P_2$ et f_d est injective.

Bilan : si $d^{\circ}P \leq 1$ f_d est injective et si $d^{\circ}P \geq 2$ f_d n'est pas injective.