Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2020-2021

Fondamentaux des mathématiques I 16 décembre 2020. Durée : 2 heures

CONTRÔLE TERMINAL

Les exercices sont indépendants les uns des autres. Le sujet est long, mais résoudre (parfaitement !) cinq exercices suffit à obtenir la note maximale.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul.

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :

$$z^{2n+1} + 1 = 0.$$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante, d'inconnue z :

$$1 - z + z^2 - z^3 + \cdots - z^{2n-1} + z^{2n} = 0.$$

Exercice 2

1) Sans les calculer, montrer l'existence de deux entiers relatifs a et b dans $\mathbb{Z}$ pour lesquels :

$$13a + 10b = 1.$$

2) Expliciter deux entiers relatifs a et b dans $\mathbb{Z}$ pour lesquels :

$$13a + 10b = 1.$$

3) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante, d'inconnue (x, y) :

$$13x + 10y = 1.$$

4) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation suivante, d'inconnue u :

$$20u \equiv 2 \quad [13].$$

Exercice 3

On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x < 0 \\ x^3 - x^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Déterminer en quels points de $\mathbb{R}$ cette fonction est continue, et en quels points elle est dérivable.

T.S.V.P.

Exercice 4

On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $P = (X+1)^7 - X^7 - 1$.

1) Calculer j^3 puis montrer que $j^2 + j + 1 = 0$.

2) Expliciter deux racines réelles de P.

3) Montrer que j est une racine au moins double de P.

4) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P.

5) Expliciter les décompositions en facteurs irréductibles de P, d'abord dans $\mathbb{C}[X]$ et ensuite dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ les deux suites réelles respectivement définies par :

$$u_n = 2\sqrt{n} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$$

(la numérotation commence à $n = 1$: les termes u_0 et v_0 ne sont pas définis).

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante.

2) Montrer que $v_n - u_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

3) a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a l'inégalité :

$$\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}}.$$

b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante.

4) Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont-elles convergentes ?

Exercice 6

On note f l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(P) = (P(1), P(2)).$$

1) a) Soit a et b deux réels. Calculer $f\left(a(X-1) + b(X-2)\right)$.

b) Montrer que l'application f est surjective.

2) On note (E_0) l'équation suivante, d'inconnue P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(E_0) \qquad f(P) = (0,0)$$

a) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si $(X-1)(X-2)$ divise P, alors P est solution de (E_0).

b) Montrer que, réciproquement, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, si P est solution de (E_0), alors $(X-1)(X-2)$ divise P. (On pourra utiliser la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)$).

c) Quelles sont les solutions de (E_0) ?

3) Résoudre l'équation suivante, d'inconnue P dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(E) \qquad f(P) = (-1, 4)$$

(on pourra utiliser les deux questions précédentes).

4) Pour chaque d entier naturel, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à d et on note f_d la restriction de f, de l'ensemble $\mathbb{R}_d[X]$ vers $\mathbb{R}^2$.

a) Pour quelles valeurs de d l'application f_d est-elle surjective ?

b) Pour quelles valeurs de d l'application f_d est-elle injective ?