Contrôle continu commun printemps 2010

Exercice 1.

1°) a) Quel est le domaine de définition de la fonction argsh ?

b) Cette fonction est-elle dérivable en tout point de ce domaine de définition ? Expliquer sommairement comment cela peut-il être justifié ?

c) Pour un x en lequel argsh est dérivable, rappeler l'expression de $\operatorname{argsh}'(x)$ mentionné en cours.

2°) a) Quel est le domaine de définition de la fonction $\arccos$?

b) Cette fonction est-elle dérivable en tout point de ce domaine de définition ? Expliquer sommairement comment cela peut-il être justifié ?

c) Pour un x en lequel $\arccos$ est dérivable, rappeler l'expression de $\arccos'(x)$ mentionné en cours.

Exercice 2.

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \arcsin(\operatorname{th}(x)) - \arctan(\operatorname{sh}(x))$$

1) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f, puis montrer que f est dérivable sur cet ensemble de définition.

2) Pour tout $x \in D_f$, calculer la valeur $f'(x)$ de la dérivée de f au point x.

3) Que dire de f.

Exercice 3.

Dans cet exercice, les informations suivantes pourront être utile :

$$\frac{1}{48} = 0{,}02083333\ldots, \qquad 9 \times 4^5 = 9216 \qquad 9 \times 5^5 = 28125$$

1) Enoncer le théorème de Taylor-Lagrange, on notera $n+1$ l'ordre du reste dans la formule.

2) Ecrire la conclusion de ce théorème lorsqu'on l'applique à la fonction $f : t \mapsto t^{\frac{1}{3}}$, entre 64 et 65 et avec un reste à l'ordre 2.

3) En déduire un nombre décimal qui approche $\sqrt[3]{65}$ avec une précision inférieur à 10^{-4} près.

4) (Un peu délicate). Sauriez-vous déduire de la question 2 la valeur approchée à 10^{-4} près par défaut de $\sqrt[3]{65}$?