

CC1 : Polynômes et fractions rationnelles

Date 6 Avril 2010 - durée : 1 heure

Question 1. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes sur le corps commutatif \mathbb{K} . Démontrer l'énoncé suivant :

*L'élément $a \in \mathbb{K}$ est racine au moins double du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$
si et seulement si
 a est racine simultanément de P et du polynôme dérivé P'*

Allez à : [Correction question1](#)

Question 2. Soit $P = (X + 1)^7 - X^7 - 1$. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

- a) Montrer que $1 + j = -j^2$
- b) Montrer que j est une racine multiple de P .
- c) Trouver deux racines réelles évidentes de P .
- d) Factoriser P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Allez à : [Correction question2](#)

Question 3. Soit n un entier strictement positif.

- a) Déterminer le pgcd des polynômes $X^n - 1$ et $(X - 1)^n$ dans $\mathbb{R}[X]$.
- b) Pour $n = 3$, trouver un couple de polynômes (U, V) tel que :
$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1$$

Allez à : [Correction question3](#)

Question 4. On considère la fraction rationnelle suivante de $\mathbb{R}(X)$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{X^2 - 4}{(X^2 + 2X + 5)(X - 1)^2}$$

- a) Déterminer, sans calculer les coefficients, la forme de la décomposition en éléments simple de $\frac{P}{Q}$ sur \mathbb{R} . Justifier votre réponse.
-

- b) (Question bonus) Calculer les coefficients dans la décomposition de $\frac{P}{Q}$ trouvée au point a).

Allez à : [Correction question4](#)

CORRECTION

Correction question1.

Si $a \in \mathbb{K}$ est racine au moins double du polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P = (X - a)^2 Q \Rightarrow P(a) = 0$$

a est racine de P .

$$P' = 2(X - a)Q + (X - a)^2 Q' \Rightarrow P'(a) = 0$$

Donc a est racine de P' .

Réciproque

Si a est racine de P et de P' .

a est racine de P donc il existe Q_1 tel que $P = (X - a)Q_1$, en dérivant ce polynôme on trouve :

$$P' = Q_1 + (X - a)Q_1'$$

Or $P'(a) = 0$ donc $0 = Q_1(a) + (a - a)Q_1'(a)$, par conséquent $Q_1(a) = 0$, il existe donc un polynôme Q tel que $Q_1 = (X - a)Q$, ce que l'on remplace dans $P = (X - a)Q_1$ donc $P = (X - a)^2Q$.

Cela signifie que a est racine double de P .

Allez à : **Question 1**

Correction question2.

$$a) 1 + j = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} = -\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right) = -e^{\frac{4i\pi}{3}} = -\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2 = -j^2$$

Ou mieux

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

$$\text{Car } j^3 = \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1.$$

b)

$$P(j) = (j + 1)^7 - j^7 - 1 = (-j^2)^7 - j^6j - 1 = -j^{14} - j - 1 - j^{12}j^2 - j - 1 = -(j^2 + j + 1) = 0$$

$$P' = 7(X + 1)^6 - 7X^6$$

$$P'(j) = 7((j + 1)^6 - j^6) = 7((-j^2)^6 - 1) = 7(j^{12} - 1) = 7(1 - 1) = 0$$

Donc j est au moins racine double.

$$c) P(0) = (0 + 1)^7 - 0^7 - 1 = 1^7 - 1 = 0 \text{ et } P(-1) = (-1 + 1)^7 - (-1)^7 - 1 = 0 - (-1) - 1 = 0$$

Donc 0 et -1 sont deux racines évidentes.

d) Le début de la formule du binôme de $(X + 1)^7$ est $X^7 + 7X^6$ (il y a plein d'autre terme mais il est inutile de les calculer) donc P est un polynôme de degré 6 et son coefficient dominant est 7.

D'autre part, j est racine double (au moins) donc $\bar{j} = j^2$ est aussi racine double (au moins) car P est un polynôme à coefficients réels. 0 et -1 sont aussi racine, cela donne 6 racine (au moins), comme $d^\circ P = 6$ on a toutes les racines. La factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ est :

$$P = 7X(X + 1)(X - j)^2(X - \bar{j})^2$$

Dans $\mathbb{R}[X]$:

$$(X - j)(X - \bar{j}) = (X - j)(X - j^2) = X^2 - (j + j^2)X + j^3 = X^2 + X + 1$$

Donc

$$P = 7X(X + 1)\left((X - j)(X - \bar{j})\right)^2 = 7X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2$$

Allez à : **Question 2**

Correction question3.

a) $(X - 1)^n$ n'a qu'une racine $X = 1$, or 1 est racine simple de $X^n - 1$ donc

$$PGCD((X^n - 1), (X - 1)^n) = X - 1$$

b) D'après le théorème de Bézout il existe (U, V) tels que :

$$(X^3 - 1)U + (X - 1)^3V = X - 1$$

Cette équation équivaut à :

$$(X^2 + X + 1)U + (X^2 - 2X + 1)V = 1$$

$$\text{Car } X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1) \text{ et } (X - 1)^3 = (X - 1)(X^2 - 2X + 1)$$

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 2X + 1 & X^2 + X + 1 \\ \hline X^2 + X + 1 & 1 \\ \hline -3X & \end{array}$$

Donc

$$X^2 - 2X + 1 = 1 \times (X^2 + X + 1) + (-3X)$$

$X^2 + X + 1$	$-3X$
X^2	$\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>
$X + 1$	
X	
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	
1	

Donc

$$X^2 + X + 1 = (-3X) \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) + 1$$

On en tire que :

$$\begin{aligned} 1 &= (X^2 + X + 1) - (-3X) \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \\ &= X^2 + X + 1 - ((X^2 - 2X + 1) - 1 \times (X^2 + X + 1)) \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \\ &= - \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) (X^2 - 2X + 1) + \left(1 + \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \right) (X^2 + X + 1) \\ &= \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{3} \right) (X^2 - 2X + 1) + \left(-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3} \right) (X^2 + X + 1) \end{aligned}$$

Donc

$$U = -\frac{1}{3}X + \frac{2}{3} \text{ et } V = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$$

Autre méthode

$$\text{Comme } (X - 1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$$

$X^3 - 3X^2 + 3X - 1$	$X^3 - 1$
X^3	1
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>
$-3X^2 + 3X$	
$(X - 1)^3 = 1 \times (X^3 - 1) + (-3X^2 + 3X)$	
X^3	$-3X^2 + 3X$
$X^3 - X^2$	$\frac{1}{3}X + \frac{1}{3}$
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>
$X^2 - 1$	
$X^2 - X$	
<hr style="border: none; border-top: 1px solid black;"/>	
$X - 1$	

$$X^3 - 1 = \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) (-3X^2 + 3X) + X - 1$$

Il est inutile de faire une troisième division car

$$\begin{aligned} -3X^2 + 3X &= -3X(X - 1) + 0 \\ X - 1 &= X^3 - 1 - \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) (-3X^2 + 3X) = X^3 - 1 - \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) ((X - 1)^3 - (X^3 - 1)) \\ &= (X^3 - 1) \left(1 + \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) \right) - \left(-\frac{1}{3}X - \frac{1}{3} \right) (X - 1)^3 \\ &= (X^3 - 1) \left(-\frac{1}{3}X + \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{1}{3}X + \frac{1}{3} \right) (X - 1)^3 \end{aligned}$$

On retrouve le même résultat.

Allez à : [Question 3](#)

Correction question4.

a) Le polynôme $X^2 + 2X + 5$ n'a pas de racine réelle car $\Delta = 2^2 - 4 \times 5 = -16 < 0$. Et 1 est une racine double.

$$\frac{P}{Q} = \frac{aX + b}{X^2 + 2X + 5} + \frac{c}{X - 1} + \frac{d}{(X - 1)^2}$$

b) Je multiplie par $(X - 1)^2$, puis $X = 1$.

$$d = \left[\frac{X^2 - 4}{X^2 + 2X + 5} \right]_{X=1} = \frac{-3}{8}$$

Je multiplie par X , puis $X \rightarrow +\infty$.

$$0 = a + c \Leftrightarrow a = -c$$

$X = 0$.

$$-\frac{4}{5} = \frac{b}{5} - c + d \Leftrightarrow -4 = b - 5c + 5 \times \left(-\frac{3}{8}\right) \Leftrightarrow b = 5c - \frac{17}{8}$$

$X = -1$.

$$\begin{aligned} \frac{-3}{16} &= \frac{-a + b}{4} - \frac{c}{2} + \frac{d}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} = -a + b - 2c + d \Leftrightarrow -\frac{3}{4} = c + 5c - \frac{17}{8} - 2c - \frac{3}{8} \Leftrightarrow 4c = -\frac{3}{4} + \frac{17}{8} + \frac{3}{8} \\ &\Leftrightarrow 4c = \frac{7}{4} \Leftrightarrow c = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} a &= \frac{-7}{16} \\ b &= 5 \times \frac{7}{16} - \frac{17}{8} = \frac{1}{16} \\ \frac{X^2 - 4}{(X^2 + 2X + 5)(X - 1)^2} &= \frac{\frac{-7}{16}X + \frac{1}{16}}{X^2 + 2X + 5} + \frac{\frac{7}{16}}{X - 1} - \frac{\frac{3}{8}}{(X - 1)^2} \end{aligned}$$

Autre méthode pour calculer a et b

Les racines complexes de $X^2 + 2X + 5$ sont :

$$X_1 = \frac{-2 - 4i}{2} = -1 - 2i$$

Et

$$X_2 = -1 + 2i$$

On multiplie par $X^2 + 2X + 5$, puis $X = -1 + 2i$

$$\begin{aligned} a(-1 + 2i) + b &= \left[\frac{X^2 - 4}{(X - 1)^2} \right]_{X=-1+2i} = \frac{(-1 + 2i)^2 - 4}{(-1 + 2i - 1)^2} = \frac{1 - 4i - 4 - 4}{(-2 + 2i)^2} = \frac{-7 - 4i}{4(-1 + i)^2} = \frac{-7 - 4i}{4(-2i)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{7}{8}i \end{aligned}$$

Donc

$$-a + b + 2ai = \frac{1}{2} - \frac{7}{8}i \Leftrightarrow \begin{cases} -a + b = \frac{1}{2} \\ 2a = -\frac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{16} + b = \frac{1}{2} \\ a = -\frac{7}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{2} - \frac{7}{16} = \frac{1}{16} \\ a = -\frac{7}{16} \end{cases}$$

Ensuite pour trouver d on fait pareil que précédemment, puis pour calculer c , soit on fait $X = 0$ ou on multiplie par X et on fait tendre X vers l'infini.

Allez à : [Question 4](#)