

Tout document, calculatrice téléphone portable interdits

Exercice 1. (4 points)

1. Calculez

$$\int_4^5 \frac{2 - x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} dx$$

2. Déterminez les primitives de la fonction $x \rightarrow \sin(x) \cos(2x)$

3. Déterminez les primitives de la fonction $x \rightarrow \ln(x^2 + 1)$

Exercice 2.

1. Déterminer les primitives de la fonction

$$x \rightarrow \frac{1}{1 + e^x}$$

2. Prouver que l'intégrale impropre (ou généralisée)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + e^x} dx$$

Converge et donner sa valeur.

3. Prouver que l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{(1 + e^x)^2} dx$$

Converge.

Exercice 3.

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{2-x}\right)$$

1. Montrer que le domaine de définition de f est $]-\infty, 1]$.

2. Montrer que f est continue (sur son domaine).

3. En quels points f est-elle dérivable ? Donner sa dérivée.

4. Donnez le développement limité de la fonction

$$g(x) = \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}$$

Au point $a = 0$ et à l'ordre 2. En déduire le développement limité de f au point $a = 0$ et à l'ordre 3.

Exercice 4.

On considère la fonction

$$g(x) = (x - 1) \arctan(x)$$

1. Déterminer un développement limité de g en 0 à l'ordre 2.

2. En déduire l'équation de la tangente de g en 0, ainsi que la position du graphe de g par rapport à cette tangente.

3. Prouvez que la limite suivante existe et la déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x^2)}{(\ln(1 + 2x))^3}$$

4. Prouver, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq g(x) + x \leq 2x^2$$