Université Claude Bernard-Lyon 1/Licence sciences et technologie
MAT1009L/Unité d'enseignement « Intégration et approximation »
Contrôle continu final/Mardi 3 Juin/Durée 2heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de documents de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone portable sera considérée comme tentative de fraude (y compris pour regarder l'heure).

Exercice 1.

On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$

a. Préciser le domaine de définition de f et tracer son graphe.
b. Trouver $\int f(x)dx$. [Indication : on pourra compléter le carré].
c. Calculer $\int_1^2 f(x)dx$.

Exercice 2.

On considère les fonctions numériques f, g définies par

$$f(t) = 3 + \cos^2(t)\,, \quad g(t) = 4\sqrt{\cos(t)}$$

a. Vérifier que ces fonctions sont bien définies au voisinage de 0.
b. Calculer le développement limité de f en 0 et à l'ordre 7.
c. Calculer le développement limité de g en 0 et à l'ordre 4.
d. Prouver que la limite suivante existe et calculer sa valeur :

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(t) - f(t)}{t^4}.$$

Exercice 3.

1. Calculer

$$F(x) = \int \frac{dx}{\frac{1}{2} + \sin^2(x)}$$

A l'aide du changement de variable $t = \tan(x)$.

2. En déduire la valeur de

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\frac{1}{2} + \sin^2(x)}$$

Exercice 4.

1. A l'aide d'une intégration par partie calculer

$$I = \int \frac{1}{t^2} \ln(1+t^2)\, dt$$

2. Montrer que l'intégrale (impropre)

$$J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \ln(1+t^2)\, dt$$

Est convergente et trouver sa valeur.

Exercice 5.

Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \cos(x) - x^2$

a. Montrer que f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$.
b. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution dans l'intervalle $]0,1[$. Cette solution sera notée z.

c. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction f entre les points 0 et z, avec reste à l'ordre 4.

d. En déduire que

$$\frac{2}{3} < z^2 < \frac{2}{3} + \frac{1}{36}$$