Université Claude Bernard Lyon-1
Licence « sciences et technologie »
CONTROLE FINAL de Math II Algèbre
04 Juin-durée 2h

Le barème est indicatif
Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questionnaire (4 points)

1. Soient b et c deux réels. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & c \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

   a. Montrer qu'il existe un unique couple (b, c) tel que $AB = I$, où I est la matrice unité d'ordre deux.
   b. Peut-on en déduire que A est inversible ?

2. Décomposer en éléments simple sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle :

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)}$$

Exercice I (8 points)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f_1 = (1,1,2)$, $f_2 = (0,2,1)$ et $f_3 = (1,-2,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Soit $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le nombre de solutions (x_1, x_2, x_3) du système

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = b_3 \end{cases}$$

   Ici il n'est pas nécessaire de calculer la ou les solutions

   (b) En déduire que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer le déterminant de P
   (d) Calculer l'inverse de P.

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$u(f_1) = f_1, \;\; u(f_2) = -f_2, \;\; u(f_3) = -f_3$$

2. (a) Ecrire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
   (b) Calculer la matrice A de u dans la base $\mathcal{B}$
   (c) Calculer D^{-1} et en déduire A^{-1}.

Exercice II

Première partie (9 points)

Soit n un entier supérieur ou égal à 4. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieurs ou égal à n (y compris le polynôme nul).

Soit $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par :

$$\varphi: A \to A''(X) + A(0)$$

1.
   a. Rappeler rapidement une base et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Dans cette question, on suppose que n vaut 4.
   a. Calculer $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)$ et $\varphi(X^4)$
   b. Pour quelles familles $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ de réels est-ce que le polynôme $A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ appartient-il au noyau de φ ?
   c. En déduire une base du noyau de φ ?
   d. Soit $B = 12 + 12X^2$, déterminer un antécédent de B puis tous les antécédents de B.
3.

a. Pour tout k compris entre 2 et n, calculer $\varphi(X^k)$

b. Montrer que la famille $\left(\varphi(X^k)\right)_{2\leq k\leq n}$ engendre l'image de φ.

c. Donner une base et la dimension de l'image de φ.

d. En déduire la dimension puis une base de $\ker(\varphi)$.

CORRECTION

Questionnaire

1.

a.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & c \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+15-12-4 & 6-5-3c+14 \\ 3b-6-4+4 & 18+2-c-14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-1 & 15-3c \\ 3b-6 & 6-c \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$AB = I \Leftrightarrow \begin{cases} b-1=1 \\ 3b-6=0 \\ 15-3c=0 \\ 6-c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=5 \end{cases}$$

Il existe bien un unique couple $(b,c)=(2,5)$ tel que $AB=I$

b. A n'est pas une matrice carrée donc elle n'est pas inversible.

2. Il existe a, b réels et α complexe tels que

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{4X}{(X-1)(X+1)(X-i)(X+i)} = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{\alpha}{X-i} + \frac{\overline{\alpha}}{X+i} \qquad (*)$$

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$

$$b = \left[\frac{4X}{X^2+1}\right]_{X=1} = 2$$

On multiplie par $x-i$, puis $X=i$

$$\alpha = \left[\frac{4X}{(X-1)^2(x+i)}\right]_{X=i} = \frac{4i}{(i-1)^2\times 2i} = \frac{2}{-1-2i+1} = \frac{2}{-2i} = i$$

Donc $c=0$

On fait $X=0$ dans $(*)$

$$0 = -a + b + \frac{\alpha}{-i} + \frac{\overline{\alpha}}{i} = -a + 2 - 1 - 1 \Rightarrow a = 0$$

Par conséquent $a = b + d = 0$

$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)} = \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{i}{X-i} - \frac{i}{X+i}$$

Exercice I (8 points)

1.

a.

$$(S)\ \begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 + \ x_3 = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Comme

$$\det P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

La matrice P est donc inversible donc le système (S) équivaut à

$$X = P^{-1}B$$

Ce qui montre que ce système admet un unique solution quelque soit B.

b.

$$\det(f_1,f_2,f_3)=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&-2\\2&1&1\end{vmatrix}=\det(P)=1\neq 0$$

Donc $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

c. La matrice P est celle définie au a., donc

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&-2\\2&1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\det(P)=1$$

d.

$$PX=B\Leftrightarrow \begin{matrix}L_1\\L_2\\L_3\end{matrix}\begin{cases}x_1 \quad\quad + x_3=b_1\\x_1+2x_2-2x_3=b_2\\2x_1+x_2+\ x_3=b_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2-L_1\\L_3-2L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1 \quad\quad + x_3=b_1\\2x_2-3x_3=b_2-b_1\\x_2-x_3=b_3-2b_1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\\2L_3-L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1 \quad\quad + x_3=b_1\\2x_2-3x_3=b_2-b_1\\x_3=2(b_3-2b_1)-(b_2-b_1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_3+b_1\\2x_2=3x_3+b_2-b_1\\x_3=-3b_1-b_2+2b_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-(-3b_1-b_2+2b_3)+b_1\\2x_2=3(-3b_1-b_2+2b_3)+b_2-b_1\\x_3=-3b_1-b_2+2b_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=4b_1+b_2-2b_3\\2x_2=-10b_1-2b_2+6b_3\\x_3=-3b_1-b_2+2b_3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=4b_1+b_2-2b_3\\x_2=-5b_1-b_2+3b_3\\x_3=-3b_1-b_2+2b_3\end{cases}\Leftrightarrow X=P^{-1}B$$

Par conséquent

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&-2\\-5&-1&3\\-3&-1&2\end{pmatrix}$$

2.

a.

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$
$$A=PDP^{-1}$$

Calculons d'abord

$$PD=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&2&-2\\2&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-2&2\\2&-1&-1\end{pmatrix}$$

Puis

$$A=(PD)P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-2&2\\2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&-2\\-5&-1&3\\-3&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&2&-4\\8&1&-4\\16&4&-9\end{pmatrix}$$

b. Si on pose $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$

Alors

$$DX=Y\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1\\-x_2=y_2\\-x_3=y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=y_1\\x_2=-y_2\\x_3=-y_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

C'est une façon compliquée de s'apercevoir que $D^{-1}=D$

$$A^{-1}=(PDP^{-1})^{-1}=(P^{-1})^{-1}D^{-1}P^{-1}=PDP^{-1}=A$$

Exercice II

1.

a. Une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ et sa dimension est $n+1$.

b. Soient A_1 et A_2 deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et soient λ_1 et λ_2 deux réels.

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) &= (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)''(X) + (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(0) \\ &= \lambda_1 A_1''(X) + \lambda_2 A_2''(X) + \lambda_1 A_1(0) + \lambda_2 A_2(0) \\ &= \lambda_1\big(A_1''(X) + A_1(0)\big) + \lambda_1\big(A_2''(X) + A_2(0)\big) = \lambda_1\varphi(A_1) + \lambda_2\varphi(A_2)\end{aligned}$$

φ est donc une application linéaire.

2.

a.

$$\varphi(0) = 0 + 0 = 0; \varphi(1) = 0 + 1 = 1; \varphi(X) = 0 + 0 = 0; \varphi(X^2) = 2 + 0 = 2;$$
$$\varphi(X^3) = 6X + 0 = 6X; \varphi(X^4) = 12X^2 + 0 = 12X^2$$

b. Soit $A = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4$

$$\begin{aligned}\varphi(A) &= \varphi(a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + a_4 X^4) \\ &= a_0\varphi(1) + a_1\varphi(X) + a_2\varphi(X^2) + a_3\varphi(X^3) + a_4\varphi(X^4) \\ &= a_0 + 2a_2 + 6a_3 X + 12a_4 X^2\end{aligned}$$

$$A \in \ker(\varphi) \Leftrightarrow a_0 + 2a_2 + 6a_3 X + 12a_4 X^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 + 2a_2 = 0 \\ 6a_3 = 0 \\ 12a_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -2a_2 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{cases}$$

Par conséquent

$$A = -2a_2 + a_1 X + a_2 X^2 = a_2(-2 + X^2) + a_1 X$$

Les polynômes $-2 + X^2$ et X ne sont pas proportionnels, donc $(-2 + X^2, X)$ forment une famille libre et génératrice de $\ker(\varphi)$, c'est une base.

c.

$$B = 12 + 12X^2 = 6 \times 2 + 12X^2 = 6\varphi(X^2) + \varphi(X^4) = \varphi(6X^2 + X^4)$$

Soit A_1 un autre antécédent de B, $\varphi(A_1) = \varphi(6X^2 + X^4)$

En faisant la différence

$$\varphi(A_1 - 6X^2 + X^4) = 0$$

Ce qui montre que $A_1 - 6X^2 + X^4 \in \ker(\varphi)$, par conséquent il existe α et β réels tels que :

$$A_1 - 6X^2 + X^4 = \alpha(-2 + X^2) + \beta X$$

Donc

$$A_1 = 6X^2 - X^4 + \alpha(-2 + X^2) + \beta X$$

3.

a. Pour $k \geq 2$

$$\varphi(X^k) = k(k-1)X^{k-2} + 0 = k(k-1)X^{k-2}$$

b.

$$Im(\varphi) = Vect\big(\varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3), \dots, \varphi(X^n)\big) = Vect(1, 0, 2, 6X, \dots, n(n-1)X^{n-2}) =$$
$$= Vect(2, 6X, \dots, n(n-1)X^{n-2}) = Vect\big(\varphi(X^2), \varphi(X^3), \dots, \varphi(X^n)\big)$$

Ce qui montre que $\big(\varphi(X^2), \varphi(X^3), \dots, \varphi(X^n)\big)$ est une famille génératrice de $Im(\varphi)$

c. $\big(\varphi(X^2), \varphi(X^3), \dots, \varphi(X^n)\big) = (2, 6X, \dots, n(n-1)X^{n-2})$

Comme $(1, X, \dots, X^{n-2})$ est une famille libre, $(2, 6X, \dots, n(n-1)X^{n-2})$ est une famille libre, par conséquent une base de $Im(\varphi)$ est $\big(\varphi(X^2), \varphi(X^3), \dots, \varphi(X^n)\big)$

Remarque :

$$Im(\varphi) = Vect(2, 6X, \dots, n(n-1)X^{n-2}) = Vect(1, X, \dots, X^{n-2}) = \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

Et $\dim\big(Im(\varphi)\big) = n - 1$

d. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(\varphi)) + \dim\big(Im(\varphi)\big) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$$

Donc

$$\dim(\ker(\varphi)) + n - 1 = n + 1$$

Par conséquent

$$\dim(\ker(\varphi)) = 2$$

Les polynômes $-2+X^2$ et X vérifient $\varphi(-2+X^2)=0$ et $\varphi(X)=0$, ils sont dans le noyau, ils ne sont pas proportionnels, donc $(-2+X^2, X)$ forment une famille libre d'un espace de dimension 2, c'est une base de $\ker(\varphi)$.