Université Claude Bernard Lyon-1
Licence « sciences et technologie »
CONTROLE FINAL de Math II Algèbre
04 Juin-durée 2h

Le barème est indicatif
Documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits

Questionnaire (4 points)

1. Soient $b$ et $c$ deux réels. On considère les matrices :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b & 6 \\ 3 & -1 \\ 4 & c \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$
   a. Montrer qu'il existe un unique couple $(b, c)$ tel que $AB = I$, où $I$ est la matrice unité d'ordre deux.
   b. Peut-on en déduire que $A$ est inversible ?
2. Décomposer en éléments simple sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle :
$$\frac{4X}{(X-1)^2(X^2+1)}$$

Exercice I (8 points)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f_1 = (1,1,2)$, $f_2 = (0,2,1)$ et $f_3 = (1,-2,1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Soit $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer le nombre de solutions $(x_1, x_2, x_3)$ du système
$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = b_1 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = b_2 \\ 2x_1 + x_2 \ + x_3 = b_3 \end{cases}$$
   *Ici il n'est pas nécessaire de calculer la ou les solutions*
   (b) En déduire que la famille $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Ecrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer le déterminant de $P$
   (d) Calculer l'inverse de $P$.

Soit $u$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :
$$u(f_1) = f_1, \ \ u(f_2) = -f_2, \ \ u(f_3) = -f_3$$

2. (a) Ecrire la matrice $D$ de $u$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (b) Calculer la matrice $A$ de $u$ dans la base $\mathcal{B}$
   (c) Calculer $D^{-1}$ et en déduire $A^{-1}$.

Exercice II

Première partie (9 points)

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 4. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieurs ou égal à $n$ (y compris le polynôme nul).

Soit $\varphi: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ l'application définie par :
$$\varphi: A \to A''(X) + A(0)$$

1. 
   a. Rappeler rapidement une base et la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.
   b. Montrer que $\varphi$ est une application linéaire.
2. Dans cette question, on suppose que $n$ vaut 4.
   a. Calculer $\varphi(0), \varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2), \varphi(X^3)$ et $\varphi(X^4)$
   b. Pour quelles familles $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ de réels est-ce que le polynôme $A(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4$ appartient-il au noyau de $\varphi$ ?
   c. En déduire une base du noyau de $\varphi$ ?
   d. Soit $B = 12 + 12X^2$, déterminer un antécédent de $B$ puis tous les antécédents de $B$.
3. 

a. Pour tout $k$ compris entre 2 et $n$, calculer $\varphi(X^k)$
b. Montrer que la famille $\left(\varphi(X^k)\right)_{2\leq k\leq n}$ engendre l'image de $\varphi$.
c. Donner une base et la dimension de l'image de $\varphi$.
d. En déduire la dimension puis une base de $\ker(\varphi)$.