Université Claude Bernard-Lyon 1/ Licence sciences et technologie
Math L1/ Unité d'enseignement « Intégration et approximation »
Contrôle continu final/ Durée 2 heures

Les exercices ci-dessous sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. L'utilisation de document de toute nature et de calculettes n'est pas autorisée, l'utilisation de téléphone sera considéré comme tentative de fraude (y compris regarder l'heure). Le sujet est imprimé sur une page.

Exercice 1.

a. Calculer $\int_0^\pi x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx$

b. Déterminer une primitive pour la fonction $x \to \frac{1}{e^x+4e^{-x}}$

Correction exercice 1.

a.

$$\int_0^\pi x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx = \int_0^\pi x\sqrt{2\sin^2(x)}\,dx = \sqrt{2}\int_0^\pi x|\sin(x)|dx$$

Comme $x \in [0,\pi]$, $\sin(x) \geq 0$ donc $|\sin(x)| = \sin(x)$

$$\int_0^\pi x\sqrt{1-\cos(2x)}\,dx = \sqrt{2}\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$$

Faisons une intégration par partie

$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx$	
$u'(x) = \sin(x)$	$u(x) = -\cos(x)$
$v(x) = x$	$v'(x) = 1$
$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx) = [-x\cos(x)]_0^\pi -$	$\int_0^\pi(-\cos(x))dx$

Donc

$$\int_0^\pi x\sin(x)\,dx) = \sqrt{2}\left([-x\cos(x)]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\,dx\right) = \sqrt{2}(-\pi\cos(\pi) + [\sin(x)]_0^\pi) = \pi\sqrt{2}$$

b. On fait le changement de variable $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln(t)$ ce qui entraine que $dx = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{1}{e^x+4e^{-x}}dx = \int \frac{1}{t+\frac{4}{t}}\frac{dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2+4} = \int \frac{dt}{t^2+2^2} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{t}{2}\right) + K = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{e^x}{2}\right) + K$$

Où K est une constante réelle.

Exercice 2. On définit une fonction f comme suit :

$$f(x) = x\ln(x) - \arcsin(1-x^2),\ \ 0 < x \leq 1$$

a. Expliquer pourquoi la fonction est continue sur l'intervalle $]0,1]$.

b. Quelle valeur doit-on donner à $f(0)$ afin que f soit continue sur $[0,1]$?

c. Calculer la dérivée de f en un point $x \in]0,1[$.

d. Démontrer que f atteint un minimum sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

Correction exercice 2.

a. Pour $0 < x \leq 1$, on a $0 < x^2 \leq 1$, ce qui entraine que $-1 \leq x^2 < 0$ et donc $0 \leq 1-x^2 < 1$, ce qui montre que $x \to \arcsin(1-x^2)$ est définie et continue sur $]0,1]$.
f est la composée et la somme de fonctions continues sur $]0,1]$ donc f est continue sur $]0,1]$.

b. Pour cela il faut calculer la limite éventuelle de f en 0^+

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

C'est une forme indéterminée classique

Comme $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$, on a :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Par conséquent si on pose $f(0) = -\frac{\pi}{2}$ alors f est continue sur $[0,1]$.

c.

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - \frac{-2x}{\sqrt{1-(1-x^2)^2}} = \ln(x) + 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-(1-2x^2+x^4)}}$$

$$= \ln(x) + 1 + \frac{2x}{\sqrt{2x^2-x^4}} = \ln(x) + 1 + \frac{2x}{\sqrt{x^2(2-x^2)}} = \ln(x) + 1 + \frac{2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$$

Comme $x > 0$, $|x| = x$.

Par conséquent

$$f'(x) = \ln(x) + 1 + \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} = \ln(x) + 1 + 2(2-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

d. Il est vain de vouloir trouver une valeur qui s'annule la dérivée de f en changeant de signe,

Première méthode :

$$f''(x) = \frac{1}{x} + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{x} + 2x(2-x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty \quad \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f'(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} > 0$$

La fonction f' est une bijection croissante de $]0,1[$ sur $]-\infty, 1+\sqrt{2}[$

Il existe un unique $x_0 \in]0,1[$ tel que $f'(x_0) = 0$ avec

$x \in]0, x_0[\Rightarrow f'(x_0) < 0$ et $x \in]x_{0,1}[\Rightarrow f'(x_0) > 0$

Cela montre que f admet un minimum absolu en $f(x_0)$

Deuxième méthode

La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc f est bornée et atteint ses bornes, il reste à montrer que le minimum est ni en $x = 0$ ni en $x = 1$.

Comme la dérivée est continue et décroissante en 0, $f(0)$ n'est pas un minimum puisque la fonction décroit au voisinage de 0, de même la dérivée est positive et continue au voisinage de $x = 1$ donc $f(1)$ n'est pas un minimum car la fonction est croissante au voisinage de $x = 1$.

Exercice 3. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 3y = 3t^2 + 2t$$

Correction exercice 3.

Soit (E') l'équation homogène associée

$$y'' + 4y' + 3y = 0$$

Son équation caractéristique est $r^2 + 4r + 3 = 0$, ses racines sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -3$

La solution générale de (E') est

$$y = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{-3t}$$

Avec λ_1 et λ_2 deux constantes réelles.

On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$\varphi_P(t) = at^2 + bt + c$$

Où a, b et c sont trois constantes réelles.

$$\varphi_P'(t) = 2at + b \quad et\ \varphi_P(t) = 2a$$

Ce que l'on remplace dans l'équation avec second membre.

$$2a+4(2at+b)+3(at^2+bt+c)=3t^2+2t\Leftrightarrow 3at^2+[8a+3b]t+2a+4b+3c$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3a=3\\8a+3b=2\\2a+4b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\3b=-6\\2a+4b+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\2-8+3c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=-2\\c=2\end{cases}$$

Donc $\varphi_P(t)=t^2-2t+2$ et la solution générale de l'équation avec second membre est

$$y=\lambda_1 e^{-t}+\lambda_2 e^{3t}+t^2-2t+2$$

Exercice 4. Déterminer le développement limité en 0 et d'ordre 6 de la fonction

$$f(x)=\ln(\cos(x))$$

Correction exercice 4.

$$f(x)=\ln\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+o(x^6)\right)=\ln(1+X)=X-\frac{X^2}{2}+\frac{X^3}{3}+o(X^3)$$

Avec

$$X=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)$$

$$X^2=\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{48}-\frac{x^6}{48}+o(x^6)$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+o(x^6)$$

$$X^3=-\frac{x^6}{8}+o(x^6)\quad \text{et}\quad o(X^3)=o(x^6)$$

Donc

$$f(x)=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)-\frac{\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+o(x^6)}{2}+\frac{-\frac{x^6}{8}+o(x^6)}{3}+o(x^6)$$

$$=-\frac{x^2}{2}+\left[\frac{1}{24}-\frac{1}{8}\right]x^4+\left[-\frac{1}{720}+\frac{1}{48}-\frac{1}{24}\right]x^6+o(x^6)=-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6)$$

Exercice 5.

a. Ecrire la formule de Taylor-Lagrange entre 0 et t et avec un reste d'ordre 6 de la fonction

$$f(x)=e^x\sin(x)$$

b. Trouver un polynôme $P(t)$ (en justifiant) tel que

$$|P(t)-e^t\sin(t)|<\frac{1}{30}$$

Pour $t\in[0,1]$

Correction exercice 5.

a. f est C^∞ donc elle admet une formule de Taylor Lagrange à n'importe quel ordre, il existe $c\in]0,t[$ si $t>0$ ou $]t,0[$ si $t<0$

$$f(t)=f(0)+tf'(0)+\frac{t^2}{2!}f''(0)+\frac{t^3}{3!}f'''(0)+\frac{t^4}{4!}f^{(4)}(0)+\frac{t^5}{5!}f^{(5)}(0)+\frac{t^6}{6!}f^{(6)}(c)$$

$$f(t)=e^t\sin(t)\Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(t)=e^t\sin(t)+e^t\cos(t)=e^t(\sin(t)+\cos(t))\Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(t)=e^t(\sin(t)+\cos(t))+e^t(\cos(t)-\sin(t))=2\cos(t)\,e^t\Rightarrow f''(t)=2$$

$$f'''(t)=-2\sin(t)\,e^t+2\cos(t)\,e^t=2e^t(\cos(t)-\sin(t))\Rightarrow f'''(0)=2$$

$$f^{(4)}(t)=2e^t(\cos(t)-\sin(t))+2e^t(-\sin(t)-\cos(t))=-4e^t\sin(t)\Rightarrow f^{(4)}(0)=0$$

$$f^{(5)}(t)=-4e^t\sin(t)-4e^t\cos(t)=4e^t(-\sin(t)-\cos(t))\Rightarrow f^{(5)}(0)=-4$$

$$f^{(6)}(t) = 4e^t(-\sin(t) - \cos(t)) + 4e^t(-\cos(t) + \sin(t)) = -8e^t\cos(t) \Rightarrow f^{(6)}(c) = -8e^c\cos(c)$$

Donc

$$e^t\sin(t) = 0 + 1 \times t + \frac{t^2}{2} \times 2 + \frac{t^3}{6} \times 2 + \frac{t^4}{24} \times 0 + \frac{t^5}{120} \times (-4) + \frac{t^6}{720} \times (-8e^c\cos(c))$$
$$= t + t^2 - \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{30} - \frac{t^6}{90}e^c\cos(c)$$

b. On en déduit que

$$\frac{t^6}{90}e^c\cos(c) = t + t^2 - \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{30} - e^t\sin(t)$$

Puis en prenant la valeur absolue, et puis que $0 < t < 1$

$$\left|t + t^2 - \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{30} - e^t\sin(t)\right| = \left|\frac{t^6}{90}e^c\cos(c)\right| \leq \frac{|t^6|}{90}e^c < \frac{e}{90} < \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$