Contrôle continu final-lundi 11 Juin 2012
Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices *et téléphones portables* sont interdits.
Une grande importance sera accordée à la précision de la rédaction.
L'énoncé comporte deux pages.
Il n'est pas nécessaire de traiter l'intégralité du sujet pour obtenir la note maximale.

Question de cours

Soit u une application linéaire d'un espace vectoriel E vers un espace vectoriel F.

1. Rappelez la définition du noyau $\ker(u)$ de u.
2. Montrer que u est injective si et seulement si $\ker(u)=\{0_E\}$

Correction Question de cours

1. $\ker(u)=\{x\in E, u(x)=0_F\}$
2. Si u est injective.
   Comme $u(0_E)=0_F$
   $$x\in\ker(u)\Rightarrow u(x)=0_F\Rightarrow u(x)=u(0_E)\Rightarrow x=0_E$$
   Car u est injective.
   Cela montre que $\ker(u)=\{0_F\}$
   Si $\ker(u)=\{0_E\}$
   $$u(x)=u(y)\Rightarrow u(x)-u(y)=0_F\Rightarrow u(x-y)=0_F$$
   Car u est linéaire. Cela montre que $x-y\in\ker(u)$ et comme $\ker(u)=\{0_F\}$, on a
   $$x-y=0_F$$
   Ce qui entraine que $x=y$, cela montre que u est injective.
   Finalement u est injective si et seulement si $\ker(u)=\{0_E\}$

Exercice 1.

1. Montrer que le polynôme $P=X^4-15X^2-10X+24$ est divisible par X^2+2X-3 dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Donner la décomposition de P en produit de facteurs de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Soient p,q et r trois réels et α,β,γ et δ les quatre racines du polynôme $Q=X^3+pX^2+qX+r$.
   a) On pose $S_1=\alpha+\beta+\gamma$ et $S_2=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$
      [On pourra reconnaître et développer $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.]
   Calculer S_1 et S_2 en fonction de p,q et r.
   b) On pose enfin : $T=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$. Calculer T en fonction de p,q et r.

Correction exercice 1.

1.

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 \qquad\quad - 15X^2 - 10X + 24 & X^2 + 2X - 3 \\ \cline{2-2}
X^4 + 2X^3 - 3X^2 \qquad\qquad\quad & X^2 - 2X - 8 \\ \cline{1-1}
-2X^3 - 12X^2 - 10X + 24 & \\
-2X^3 - 4X^2 \quad + 6X \quad & \\ \cline{1-1}
-8X^2 - 16X + 24 & \\
-8X^2 - 16X + 24 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Donc P est divisible par $X^2 + 2X - 3$ et

$$X^4 - 15X^2 - 10X + 24 = (X^2 + 2X - 3)(X^2 - 2X - 8)$$

2. Les racines de $X^2 + 2X - 3$ sont 1 et -3 donc $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$
   Les racines de $X^2 - 2X - 8$ sont -2 et 4, donc $X^2 - 2X - 8 = (X + 2)(X - 4)$
   Par conséquent :
   $$P = X^4 - 15X^2 - 10X + 24 = (X + 3)(X - 1)(X + 2)(X - 4)$$
3.
   a)
   $$S_1 = \alpha + \beta + \gamma = -p$$
   (C'est-à-dire l'opposé du coefficient de X^2)
   $$S_2 = \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = q$$
   (C'est-à-dire le coefficient de X)

   b)
   $$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$
   Avec les notations de l'énoncé
   $$(S_1)^2 = T + 2S_2$$
   Ce qui équivaut à $T = (-p)^2 - 2q = p^2 - 2q$

Exercice 2.

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ respectivement de dimension 3 et 4. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ une base de F.

Soit u une application linéaire définie par

$$u(e_1) = f_1 - 2f_2 + f_3$$
$$u(e_2) = f_2 - 2f_3 + f_4$$
$$u(e_3) = -f_1 + f_2 + f_3 - f_4$$

1. Donner la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
2. Déterminer une base de $\ker(u)$.
3. En déduire le rang de u.
4. Donner une base de $Im(u)$.
5. Soit $G = Vect(f_1, f_4)$ le sous-espace vectoriel de F engendré par f_1 et f_4. Montrer que G est un supplémentaire de $Im(u)$.

Correction exercice 2.

1.

$$
\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccc} u(e_1) & u(e_2) & u(e_3) \end{array} & \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{array}
\end{array}
$$

2. Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \ker(u)$

$$u(x) = 0_F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \qquad - x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 \quad - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \qquad x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ -2x_3 + x_3 + x_3 = 0 \\ x_3 - 2x_3 + x_3 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = x_3 \end{cases}$$

Par conséquent $x = (x_3, x_3, x_3) = x_3(1,1,1)$, on pose $a = (1,1,1)$ et alors

$$\ker(u) = Vect(a)$$

3. D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim\big(Im(u)\big) = \dim(E) \Leftrightarrow 1 + \dim\big(Im(u)\big) = 3 \Leftrightarrow \dim\big(Im(u)\big) = 2$$

Le rang de u est donc 2.

4. $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une famille de deux vecteurs non proportionnels qui forment donc une famille libre dans un espace de dimension 2, il s'agit d'une base de $Im(u)$

Autre méthode

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big)$$

Or $u(e_1) + u(e_2) + u(e_3) = 0_F$ donc $u(e_3) = -u(e_1) - u(e_2)$, par conséquent

$$Im(u) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\big) = Vect\big(u(e_1), u(e_2), -u(e_1) - u(e_2)\big) = Vect\big(u(e_1), u(e_2)\big)$$

et alors $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est une famille génératrice à deux vecteurs dans un espace de dimension 2, c'est une base de $Im(u)$.

5. Constatons tout d'abord que (f_1, f_4) est une base de G.

On montre que $(u(e_1), u(e_2), f_1, f_4)$ est une base de F.

$$\alpha(f_1 - 2f_2 + f_3) + \beta(f_2 - 2f_3 + f_4) + \gamma f_1 + \delta f_4 = 0_F$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \gamma) f_1 + (-2\alpha + \beta) f_2 + (\alpha - 2\beta) f_3 + (\beta + \gamma) f_4 = 0_F \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

2 fois la ligne 3 plus la ligne 2 donne $-3\beta = 0$, par conséquent α, γ et δ sont nuls

$(u(e_1), u(e_2), f_1, f_4)$ est une famille libre à 4 vecteurs dans un espace de dimension 4, c'est une base de F. On en déduit que

$$Im(u) \oplus G = F$$

Exercice 3.

Soit $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

1. Montrer que $\dim(\ker(\varphi)) = 1$ et donner une base $\mathcal{B} = (a)$ de $\ker(\varphi)$.
2. Montrer que $a \in Im(u)$, c'est-à-dire qu'il existe $b \in \mathbb{R}^3$ tel que $\varphi(b) = a$.
3. Montrer que l'ensemble $E = \{v \in \mathbb{R}^3, \phi(v) = v\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Donner un vecteur c non nul de E.
5. Montrer que (a, b, c) est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner la matrice de u dans la base (a, b, c).

Correction exercice 3.

1.

$$x=(x_1,x_2,x_3)\in\ker(\varphi)\Leftrightarrow\varphi(x)=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=0\\-x_1+x_2+2x_3=0\\x_1-x_3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=0\\x_1=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3-x_2-2x_3=0\\x_1=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_3\\x_1=x_3\end{cases}$$
Donc $x=(x_3,-x_3,x_3)=x_3(1,-1,1)$, ce qui montre que $\dim(\ker(\varphi))=1$ et $a=(1,-1,1)$.

2. Première méthode
En regardant la matrice, on voit que $\varphi(e_1)=a$, $b=e_1$ répond à la question.
Deuxième méthode
On cherche $x=(x_1,x_2,x_3)$ tel que $\varphi(x)=a$
Ce qui équivaut à
$$\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=1\\-x_1+x_2+2x_3=-1\\x_1-x_3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=1\\x_1=x_3+1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_3+1-x_2-2x_3=1\\x_1=x_3+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-x_3\\x_1=x_3+1\end{cases}$$
N'importe quelle valeur de x_3 répond à la question, par exemple, on prend $x_3=0$. Et alors
$$b=(1,0,0)=e_1$$

3. $\varphi(0_{\mathbb{R}^3})=0_{\mathbb{R}^3}$ donc $0_{\mathbb{R}^3}\in E$
Soit x et y deux vecteurs de E, $\varphi(x)=x$ et $\varphi(y)=y$
Alors pour tous α et β réels
$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)$$
Car φ est linéaire, ce qui entraine que
$$\varphi(\alpha x+\beta y)=\alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y)=\alpha x+\beta y$$
Ce qui montre que $\alpha x+\beta y\in E$, par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4.
$$x=(x_1,x_2,x_3)\in E\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\-1&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-x_2-2x_3=x_1\\-x_1+x_2+2x_3=x_2\\x_1-x_3=x_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-x_2-2x_3=0\\-x_1+2x_3=0\\x_1-2x_3=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_2=-2x_3\\x_1=2x_3\end{cases}$$
Par conséquent $x=(2x_3,-2x_3,x_3)=x_3(2,-2,1)$, un vecteur non nul de E est $c=(2,-2,1)$

5. Première méthode
$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}1&0&2\\-1&1&-2\\1&0&1\end{vmatrix}$$
En développant par rapport à la seconde ligne
$$\det(a,b,c)=\begin{vmatrix}1&2\\1&-2\end{vmatrix}=-4\neq 0$$
Donc (a,b,c) est une base.
Deuxième méthode
$$\alpha a+\beta b+\gamma c=0_{\mathbb{R}^3}\Leftrightarrow\alpha(1,-1,1)+\beta(0,1,0)+\gamma(2,-2,1)=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+2\gamma=0\\-\alpha+\beta-2\gamma=0\\\alpha+\gamma=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-2\gamma\\-\alpha+\beta-2\gamma=0\\\alpha=-\gamma\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\\\gamma=0\end{cases}$$
(a,b,c) est une famille libre à 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. D'après les questions précédentes

$$\varphi(a) = 0_{\mathbb{R}^3}; \varphi(b) = a \quad \text{et} \quad \varphi(c) = c$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \varphi(a) & \varphi(b) & \varphi(c) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a \\ b \\ c \end{array} \end{array}$$

Exercice 4.

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez brièvement votre réponse.

1. Pour tout $n \geq 2$ et pour toutes matrices carrées A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a l'identité
$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$
2. Soit A une matrice carrée inversible. Alors $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.
3. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible.
4. L'application $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x, y) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, 0\right)$ est linéaire.
5. Le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^3$ défini par $e = \{(x, y, z), 2x + 3y + 5z = 1\}$ est un sous-espace vectoriel.
6. Il existe une matrice A à 4 lignes et 3 colonnes dont le rang de A est 4.
7. Il existe une matrice A à 4 lignes et 3 colonnes dont le rang de A est 2.

Correction exercice 4.

1. $$(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2$$
On a
$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$
Si et seulement si $AB = BA$, donc en général, c'est faux.
2. On a pour toutes matrices A et B inversibles : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, en prenant $B = A$, cela donne $(A^2)^{-1} = A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^2$, c'est vrai.
3. Le déterminant étant hors programme, c'est dommage parce qu'il aurait suffi de le calculer et de dire qu'il était non nul.
Première méthode : il suffit d'inverser la matrice
$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ -x_1 + 2x_2 = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 + L_1 \end{matrix} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = y_1 \\ 4x_2 = y_1 + y_2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + y_1 \\ x_2 = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2\left(\frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2\right) + y_1 \\ x_2 = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ x_2 = \frac{1}{4}y_1 + \frac{1}{4}y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$
Cela montre que est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$
Remarque : on aurait pu résoudre ce système en utilisant la méthode de Cramer.
Deuxième méthode
A est la matrice d'un endomorphisme u de $\mathbb{R}^2$, pour montrer que cet endomorphisme est bijectif (ce qui équivaut à ce que A soit inversible), il suffit de montrer que cet endomorphisme est injectif, ce qui revient à montrer que son noyau est réduit au vecteur nul.

$$x=(x_1,x_2)\in\ker(u)\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2=0\\-x_1+2x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}L_1\\L_2+L_1\end{matrix}\begin{cases}x_1+2x_2=0\\4x_2=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=0\\x_2=0\end{cases}$$

$\ker(u)=\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ par conséquent u est bijectif et A est inversible.

4. Evidemment que non, trouvons un contre-exemple

$$u\big(-2(x,0)\big)=u(-2x,0)=\left(\sqrt{(-2x)^2+0^2},0\right)=\left(\sqrt{4x^2},0\right)=(2|x|,0)$$

Alors que

$$-2u(x,0)=-2\left(\sqrt{x^2+0^2},0\right)=(-2|x|,0)$$

Pour un x non nul, ces deux expression sont distinctes, par conséquent u n'est pas linéaire.

5. $(0,0,0)\notin E$, donc E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
6. Une matrice à 4 lignes et 3 colonnes est la matrice d'une application linéaire u d'un espace vectoriel E de dimension 3 dans un espace vectoriel F de dimension 4,

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u))+\dim\big(Im(u)\big)=\dim(E)$$

Donc $\dim\big(Im(u)\big)\leq\dim(E)=3$, par conséquent il n'existe pas de matrice à 4 lignes et 3 colonnes de rang égal à 4.

7. Oui, par exemple :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Les deux première colonnes sont libres et la troisième est la somme des deux premières donc le rang de cette matrice est 2.