

Problème

Partie I.

On fixe un réel a et on considère l'application

$$u: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$$

$$P \rightarrow P - \frac{1}{3}(X - a)P'$$

Où $\mathbb{R}_3[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que l'image d'un élément de P de $\mathbb{R}_3[X]$ appartient bien à $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que l'application u est linéaire.
3. Déterminer la matrice de u dans la base \mathcal{B} .
4. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X - a, (X - a)^2, (X - a)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Calculer pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, $u((X - a)^k)$ les coordonnées de $u((X - a)^k)$ dans la base \mathcal{B}' . En déduire la matrice D de u dans la base \mathcal{B}' .
6. Déterminer une base de $\ker(u)$, une base de $\text{Im}(u)$ et le rang de u .

[On pourra utiliser la matrice D .]

Allez à : **Correction partie I**

Partie II.

Soit P , un polynôme de degré 3 à coefficients réels tel que P' divise P .

7. Montrer qu'il existe α et β réels tels que

$$P = (\alpha X + \beta)P'$$

8. Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$P = \frac{1}{3}(X - a)P'$$

9. En déduire tous les polynômes de degré 3 tels que P' divise P .

[On pourra utiliser l'endomorphisme de la première partie]

Allez à : **Correction partie II**

Partie III.

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes tel que P' divise P .

10. Démontrer qu'il existe un complexes a tel que $P = \frac{1}{n}(X - a)P'$.
11. Soient a_1, \dots, a_r des complexes deux à deux distincts et m_1, \dots, m_r des entiers naturels non nuls. On considère le polynôme :

$$Q = \prod_{k=1}^r (X - a_k)^{m_k}$$

Calculer Q' et en déduire la décomposition en éléments simple de $\frac{Q'}{Q}$

12. En déduire que P n'a qu'une seule racine.

Allez à : **Correction partie III**

Questionnaire

Les différentes questions sont indépendantes.

1. Soit n un entier naturel non nul et A la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer le rang de A et en déduire le déterminant de A .

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E , c'est-à-dire une application linéaire de E dans E .
- (a) Donner sans preuve la relation entre $\dim(E)$, $\dim(\ker(f))$ et $rg(f)$.
- (b) Démontrer que φ est injective si, et seulement si φ est surjective.
3. Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X(X-1)^2}$$

4. Soit n un entier naturel non nul et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ une matrice $n \times n$ à coefficients complexes. On suppose que pour i et j entiers compris entre 1 et n , on a :

$$a_{i,i} \neq 0 \quad \text{et} \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

C'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Démontrer que A est inversible.

Allez à : [Correction questionnaire](#)

CORRECTION

Problème

Correction partie I.

1. $d^\circ P \leq 3 \Rightarrow d^\circ((X-a)P') \leq 3 \Rightarrow d^\circ u(P) \leq 3$ donc l'image d'un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ par u est un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Soient P_1, P_2 deux polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ et λ_1 et λ_2 deux réels

$$\begin{aligned} u(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) &= (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2)' - \frac{1}{3}(X-a)(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) \\ &= (\lambda_1 P_1' + \lambda_2 P_2') - \lambda_1 \frac{1}{3}(X-a)P_1 - \lambda_2 \frac{1}{3}(X-a)P_2 \\ &= \lambda_1 \left(P_1' - \frac{1}{3}(X-a)P_1 \right) + \lambda_2 \left(P_2' - \frac{1}{3}(X-a)P_2 \right) = \lambda_1 u(P_1) + \lambda_2 u(P_2) \end{aligned}$$

u est une application linéaire.

3.

$$\begin{aligned} u(1) &= 1 - \frac{1}{3}(X-a) \times 0 = 1 \\ u(X) &= X - \frac{1}{3}(X-a) \times 1 = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}X \\ u(X^2) &= X^2 - \frac{1}{3}(X-a) \times 2X = \frac{2a}{3}X + \frac{1}{3}X^2 \\ u(X^3) &= X^3 - \frac{1}{3}(X-a) \times 3X^2 = aX^2 \end{aligned}$$

Donc

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2a}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Première méthode

$$\begin{aligned}
& \alpha + \beta(X - a) + \gamma(X - a)^2 + \delta(X - a)^3 = 0 \\
& \Leftrightarrow \alpha + \beta X - \beta a + \gamma(X^2 - 2aX + a^2) + \delta(X^3 - 3aX^2 + 3a^2X - a^3) = 0 \\
& \Leftrightarrow \alpha - \beta a + \gamma a^2 - \delta a^3 + (\beta - 2a\gamma + 3a^2\delta)X + (\gamma - 3a\delta)X^2 + \delta X^3 = 0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta a + \gamma a^2 - \delta a^3 = 0 \\ \beta - 2a\gamma + 3a^2\delta = 0 \\ \gamma - 3a\delta = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

\mathcal{B} est une famille libre à 4 éléments dans un espace vectoriel de dimension 4, c'est une base.
Deuxième méthode

$$\alpha + \beta(X - a) + \gamma(X - a)^2 + \delta(X - a)^3 = 0$$

On prend $X = a$, ce qui entraîne que $\alpha = 0$

$$\beta(X - a) + \gamma(X - a)^2 + \delta(X - a)^3 = 0 \Leftrightarrow \beta + \gamma(X - a) + \delta(X - a)^2 = 0$$

On prend $X = a$, ce qui entraîne que $\beta = 0$

$$\gamma(X - a) + \delta(X - a)^2 = 0 \Leftrightarrow \gamma + \delta(X - a) = 0$$

On prend $X = a$, ce qui entraîne que $\gamma = 0$, puis que $\delta = 0$

Même conclusion.

5.

$$\begin{aligned}
u(1) &= 1 - \frac{1}{3}(X - a) \times 0 = 1 \\
u((X - a)) &= X - a - \frac{1}{3}(X - a) \times 1 = \frac{2}{3}(X - a) \\
u((X - a)^2) &= (X - a)^2 - \frac{1}{3}(X - a) \times 2(X - a) = \frac{1}{3}(X - a)^2 \\
u((X - a)^3) &= (X - a)^3 - \frac{1}{3}(X - a) \times 3(X - a)^2 = 0
\end{aligned}$$

Les coordonnées respectives de ces polynômes dans la base \mathcal{B}' sont

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Première méthode : d'après la matrice D

$$\begin{aligned}
\ker(u) &= \text{Vect}((X - a)^3) \\
\text{Im}(u) &= \text{Vect}(1, X - a, (X - a)^2) \\
\text{Rg}(u) &= 3
\end{aligned}$$

Car manifestement $(1, X - a, (X - a)^2)$ est une base de $\text{Im}(u)$

On peut couper les cheveux en 4 en invoquant le théorème du rang mais on a montré que \mathcal{B}' est une base donc tout est évident.

Deuxième méthode (Bien plus longue)

$$\begin{aligned}
u(P) &= u(\alpha X^3 + \beta X^2 + \gamma X + \delta) = \alpha u(X^3) + \beta u(X^2) + \gamma u(X) + \delta u(1) \\
&= \alpha a X^2 + \beta \left(\frac{2}{3} a X + \frac{1}{3} X^2 \right) + \gamma \left(\frac{1}{3} a + \frac{2}{3} X \right) + \delta \\
&= \left(\alpha a + \frac{\beta}{3} \right) X^2 + \left(\frac{2a\beta}{3} + \frac{2\gamma}{3} \right) a X + \frac{\gamma a}{3} + \delta
\end{aligned}$$

$$P \in \ker(u) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha a + \frac{\beta}{3} = 0 \\ \frac{2a\beta}{3} + \frac{2\gamma}{3} = 0 \\ \frac{\gamma a}{3} + \delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3a\alpha \\ \gamma = -a\beta \\ \delta = -\frac{\gamma a}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -3a\alpha \\ \gamma = 3a^2\alpha \\ \delta = -a^3\alpha \end{cases}$$

$$P = \alpha X^3 - 3a\alpha X^2 + 3a^2\alpha X - a^3\alpha = \alpha(X - a)^3$$

Donc $\ker(u) = \text{Vect}((X - a)^3)$, $(X - a)^3$ est une base de $\ker(u)$ et $\dim(\ker(u)) = 1$

D'après le théorème du rang

$$\dim(\ker(u)) + \dim(\text{Im}(u)) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) \Leftrightarrow \dim(\text{Im}(u)) = 3$$

$$u(1) = 1 - \frac{1}{3}(X - a) \times 0 = 1$$

$$u(X) = X - \frac{1}{3}(X - a) \times 1 = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}X$$

$$u(X^2) = X^2 - \frac{1}{3}(X - a) \times 2X = \frac{2a}{3}X + \frac{1}{3}X^2$$

$$u(X^3) = X^3 - \frac{1}{3}(X - a) \times 3X^2 = aX^2$$

$$\text{Im}(u) = \text{Vect}\left(1, \frac{a}{3} + \frac{2}{3}X, \frac{2a}{3}X + \frac{1}{3}X^2, aX^2\right)$$

Cette famille est nécessairement liée puis que la dimension de l'image de u est 3, en se forçant un peu on pourrait trouvé une relation entre ces 4 polynômes (mais ce n'est pas trivial), le mieux est de choisir « au hasard » trois polynômes en espérant que cette famille est libre. On prend les trois premiers.

$$\alpha + \beta\left(\frac{a}{3} + \frac{2}{3}X\right) + \gamma\left(\frac{2a}{3}X + \frac{1}{3}X^2\right) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \frac{a}{3}\beta + \frac{2a}{3}\gamma + \left(\frac{2}{3}\beta + \frac{2a}{3}\gamma\right)X + \frac{1}{3}\gamma X^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \frac{a}{3}\beta + \frac{2a}{3}\gamma = 0 \\ \frac{2}{3}\beta + \frac{2a}{3}\gamma = 0 \\ \frac{1}{3}\gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ces trois polynômes forment une famille libre à trois éléments dans un espace de dimension 3, c'est une base de $\text{Im}(u)$.

Correction partie II.

7. Il existe un polynôme Q tel que $P = QP'$, comme $d^\circ P = 3$, $d^\circ P' = 2$ et $d^\circ P = d^\circ Q + d^\circ P'$ on a $d^\circ Q = 1$, par conséquent il existe $\alpha \neq 0$ et β réels tels que $Q = \alpha X + \beta$.

8. On pose $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$, $P' = 3aX^2 + 2bX + c$

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = (\alpha X + \beta)(3aX^2 + 2bX + c) = 3\alpha aX^3 + \dots$$

Les termes non écrits sont de degré inférieur ou égal à 2. On identifie les termes de degré 3 :

$$a = 3\alpha a \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

Car $a \neq 0$.

$$Q = \frac{1}{3}X + \beta = \frac{1}{3}\left(X + \frac{\beta}{3}\right) = \frac{1}{3}(X - a)$$

Avec $a = -\frac{\beta}{3}$.

9. $P = \frac{1}{3}(X - a)P' \Leftrightarrow P - \frac{1}{3}(X - a)P' = 0 \Leftrightarrow u(P) = 0 \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}, P = K(X - a)^3$

Correction partie III.

10. Il existe un polynôme Q tel que $P = QP'$. On a $d^\circ P = d^\circ Q + d^\circ P'$, comme $d^\circ P = n$ et $d^\circ P' = n - 1$, $d^\circ Q = 1$, par conséquent il existe α et β réels tel que

$$P = (\alpha X + \beta)P'$$

$$P = a_n X^n + A \text{ où } A \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ et } a_n \neq 0$$

$$P' = n a_n X^{n-1} + A' \text{ où } A' \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$$

$$P = (\alpha X + \beta)P' \Leftrightarrow a_n X^n + A = (\alpha X + \beta)n a_n X^{n-1} + A' \Leftrightarrow a_n X^n + A = \alpha n a_n X^n + \beta n a_n X^{n-1} + A'$$

$$d^\circ(\beta n a_n X^{n-1} + A') \leq n - 1$$

On peut identifier les termes de degré n

$$a_n = \alpha n a_n \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{n}$$

Car $a_n \neq 0$

$$Q = \frac{1}{n}X + \beta = \frac{1}{n}\left(X + \frac{\beta}{n}\right) = \frac{1}{n}(X - a)$$

Avec

$$a = -\frac{\beta}{n}$$

11.

$$Q' = \sum_{j=1}^r \left(m_j (X - a_j)^{m_j-1} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r (X - a_k)^{m_k} \right)$$

$$\frac{Q'}{Q} = \sum_{j=1}^r \frac{m_j}{X - a_j}$$

12. On a

$$\frac{P'}{P} = \frac{n}{X - a}$$

C'est la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$, si P avait d'autres racines complexes on pourrait l'écrire comme Q (D'après le théorème de D'Alembert-Gauss) et sa décomposition en éléments simples aurait plus de un élément simple.

Conclusion P n'a qu'une racine, notée a , il existe donc $k \in \mathbb{C}$ tel que

$$P = k(X - a)^n$$

Correction questionnaire

1. Tous les vecteurs colonnes sont proportionnels (et même égaux) donc le rang de A est 1.

Si $n = 1$ alors $\det(A) = 1$

Si $n \geq 2$ alors $\det(A) = 0$

2. (a) D'après le théorème de rang

$$\dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

(b)

Supposons que f est injective.

$$\ker(f) = \{0_E\} \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$$

Or $\text{Im}(f) \subset E$ et ces deux espaces vectoriels sont de même dimension donc $\text{Im}(f) = E$, ce qui signifie que f est surjective.

Supposons que f est surjective.

$$\text{Im}(f) = E \Rightarrow \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E) \Rightarrow \dim(\ker(f)) = 0 \Rightarrow \ker(f) = \{0_E\}$$

ce qui montre que f est injective.

3. Il existe a, b et c réels tels que :

$$F = \frac{1}{X(X-1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2}$$

On multiplie par X , puis $X = 0$

$$a = \left[\frac{1}{(X-1)^2} \right]_{X=0} = 1$$

On multiplie par $(X-1)^2$, puis $X=1$

$$c = \left[\frac{1}{X} \right]_{X=1} = 1$$

On multiplie par X , puis $X \rightarrow +\infty$

$$0 = a + b \Leftrightarrow b = -1$$

4. A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul or

$$\det(A) = a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n} \neq 0$$

Donc A est inversible

Allez à : [Questionnaire](#)