Math II algèbre Juin 2011

Problème

Partie I.

On fixe un réel a et on considère l'application

$$u: \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$$
$$P \to P - \frac{1}{3}(X-a)P'$$

Où $\mathbb{R}_3[X]$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que l'image d'un élément de P de $\mathbb{R}_3[X]$ appartient bien à $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Montrer que l'application u est linéaire.
3. Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
4. Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (1, X-a, (X-a)^2, (X-a)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Calculer pour tout $k \in \{0,1,2,3\}$, $u((X-a)^k)$ les coordonnées de $u((X-a)^k)$ dans la base $\mathcal{B}'$. En déduire la matrice D de u dans la base $\mathcal{B}'$.
6. Déterminer une base de $\ker(u)$, une base de $Im(u)$ et le rang de u.
   [On pourra utiliser la matrice D.]

Partie II.

Soit P, un polynôme de degré 3 à coefficients réels tel que P' divise P.

7. Montrer qu'il existe α et β réels tels que
$$P = (\alpha X + \beta)P'$$
8. Montrer qu'il existe un réel a tel que
$$P = \frac{1}{3}(X-a)P'$$
9. En déduire tous les polynômes de degré 3 tels que P' divise P.
   [On pourra utiliser l'endomorphisme de la première partie]

Partie III.

Soit P un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients complexes tel que P' divise P.

10. Démontrer qu'il existe un complexes a tel que $P = \frac{1}{n}(X-a)P'$.
11. Soient $a_1, \ldots, a_r$ des complexes deux à deux distincts et $m_1, \ldots, m_r$ des entiers naturels non nuls. On considère le polynôme :
$$Q = \prod_{k=1}^{r} (X - a_k)^{m_k}$$
    Calculer Q' et en déduire la décomposition en éléments simple de $\frac{Q'}{Q}$
12. En déduire que P n'a qu'une seule racine.

Questionnaire

Les différentes questions sont indépendantes.

1. Soit n un entier naturel non nul et A la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1 :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
   Déterminer le rang de A et en déduire le déterminant de A.

2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme de E, c'est-à-dire une application linéaire de E dans E.
   (a) Donner sans preuve la relation entre $\dim(E)$, $\dim(\ker(f))$ et $rg(f)$.
   (b) Démontrer que φ est injective si, et seulement si φ est surjective.
3. Donner la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X(X-1)^2}$$

4. Soit n un entier naturel non nul et $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i\leq j\leq n}$ une matrice $n \times n$ à coefficients complexes. On suppose que pour i et j entiers compris entre 1 et n, on a :

$$a_{i,i} \neq 0 \quad \text{et} \quad i < j \Rightarrow a_{i,i} = 0$$

   C'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

   Démontrer que A est inversible.