

CCF de MATH II-Analyse

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est interdite.

I. (3 points)

Calculer, sur un intervalle où cela a un sens :

$$\int \frac{x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2(x-1)} dx$$

Allez à : **Correction I**

II. (7 points)

Dans tout l'exercice a désigne un réel strictement positif. Pour certains réels, on note :

$$f_a(x) = \sqrt{\frac{x+a}{x+1}} \quad \text{et} \quad g_a(x) = \arctan(f_a(x))$$

1. Justifier que f_a et g_a sont des fonctions définies sur des ensembles contenant \mathbb{R}^+ .
2. En utilisant la formule de Taylor-Young, écrire un développement limité à l'ordre 2 de \arctan au voisinage de 1.
3. Pour $x > 0$, on note $h = \frac{1}{x}$.
 - a) Écrire un développement limité à l'ordre 2 de $f_a\left(\frac{1}{h}\right)$ exprimé en fonction de h , quand h tend vers 0.
 - b) En faire autant pour g_a .
 - c) Discuter en fonction de la valeur du paramètre a de la convergence ou de la divergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(g_a(x) - \frac{\pi}{4}\right) dx$$

Allez à : **Correction II**

III. (12 points)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt, \quad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$$

1. Montrer que, J_n et K_n sont des intégrales convergentes.
2. On rappelle que :

$$\sin(A) - \sin(B) = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$J_n - J_{n-1} = 0$$

En déduire la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit f définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $f(0) = 0$ et

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} \quad \text{pour } t \neq 0$$

Calculer $f'(t)$ pour $t \neq 0$, et en déduire que f est de classe C^1 sur $[-\frac{\pi}{2}, 0[\cup]0, \frac{\pi}{2}]$;

4. Calculer $f'(0)$ et conclure que f est de classe C^1 sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

5. A l'aide d'une intégration par partie montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$$

6. Vérifier que :

$$K_n = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

7. A l'aide d'une intégration par partie montrer que

$$I_2(X) = \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Admet une limite quand $X \rightarrow +\infty$.

8. Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Est une intégrale convergente

9. Montrer que

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n$$

Et en déduire la valeur de I .

Allez à : **Correction III**

CORRECTION

Correction I.

Il existe a, b et c réels tels que :

$$\frac{x^2 + 6x - 1}{(x - 3)^2(x - 1)} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{(x - 3)^2} + \frac{c}{x - 1}$$

On multiplie par $(x - 3)^2$, puis $x = 3$

$$b = \left[\frac{x^2 + 6x - 1}{x - 1} \right]_{x=3} = 13$$

On multiplie par $x - 1$, puis $x = 1$

$$c = \left[\frac{x^2 + 6x - 1}{(x - 3)^2} \right]_{x=1} = \frac{3}{2}$$

On multiplie par x , puis $x \rightarrow +\infty$

$$1 = a + c \Leftrightarrow a = 1 - c = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 6x - 1}{(x-3)^2(x-1)} dx &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x-3} + \frac{13}{(x-3)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x-3| + 13 \int (x-3)^{-2} dx + \frac{3}{2} \ln|x-1| + K \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x-3| - \frac{13}{x-3} + \frac{3}{2} \ln|x-1| + K \end{aligned}$$

Allez à : **I**

Correction II.

1. Si $x \geq 0$ alors $x + a > 0$ et $x + 1 > 0$ cela implique que $\frac{x+a}{x+1} > 0$, par conséquent, f_a est définie pour tout $x > 0$, donc sur un ensemble contenant \mathbb{R}^+ . \arctan est définie sur \mathbb{R} , donc g_a est définie sur le même ensemble que f_a .
2. $f = \arctan$ est $C^{+\infty}$ sur \mathbb{R} , donc cette fonction admet un développement limité à n'importe quel ordre.

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + \frac{(x-1)^2}{2} f''(1) + o((x-1)^2)$$

$$f(1) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\arctan(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$$

3.

a) Première méthode (Pas terrible)

$$f_a\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{\frac{1}{h} + a}{\frac{1}{h} + 1}} = \sqrt{\frac{1 + ah}{1 + h}}$$

$$\frac{1 + ah}{1 + h} = (1 + ah)(1 - h + h^2 + o(h^2)) = 1 + (a-1)h + (1-a)h^2 + o(h^2)$$

$$f_a\left(\frac{1}{h}\right) = \sqrt{\frac{1 + ah}{1 + h}} = (1 + (a-1)h + (1-a)h^2 + o(h^2))^{\frac{1}{2}} = (1 + X)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)$$

Avec

$$X = (a-1)h + (1-a)h^2 + o(h^2)$$

$$\begin{aligned} X^2 &= ((a-1)h + (1-a)h^2 + o(h^2))((a-1)h + (1-a)h^2 + o(h^2)) = (a-1)^2 h^2 + o(h^2) \\ o(X^2) &= o(h^2) \end{aligned}$$

$$f_a\left(\frac{1}{h}\right) = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}((a-1)h + (1-a)h^2 + o(h^2)) - \frac{1}{8}((a-1)^2 h^2 + o(h^2)) + o(h^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(a-1)h + \left(\frac{1}{2}(1-a) - \frac{1}{8}(a-1)^2\right)h^2 + o(h^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(a-1)h + \frac{1}{8}(1-a)(4 - (1-a))h^2 + o(h^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(a-1)h + \frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2 + o(h^2)$$

Deuxième méthode (meilleure)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{1+ah}{1+h}} &= (1+ah)^{\frac{1}{2}}(1+h)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{2}ah + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(ah)^2}{2!} + o(h^2)\right) \left(1 - \frac{1}{2}h + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{h^2}{2!} + o(h^2)\right) = \\
 &= \left(1 + \frac{a}{2}h - \frac{a^2}{8}h^2 + o(h^2)\right) \left(1 - \frac{1}{2}h + \frac{3}{8}h^2 + o(h^2)\right) \\
 &= 1 + \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)h + \left(\frac{3}{8} - \frac{a}{4} - \frac{a^2}{8}\right)h^2 + o(h^2) \\
 &= 1 + \frac{a-1}{2}h - \frac{1}{8}(a^2 + 2a - 3)h^2 + o(h^2)
 \end{aligned}$$

Comme $a = 1$ et $a = -3$ sont les deux racines de $a^2 + 2a - 3$, on retrouve bien que

$$\sqrt{\frac{1+ah}{1+h}} = 1 + \frac{1}{2}(a-1)h - \frac{1}{8}(a-1)(3+a)h^2 + o(h^2)$$

b)

$$g_a\left(\frac{1}{h}\right) = \arctan\left(f_a\left(\frac{1}{h}\right)\right) = \arctan\left(1 + \frac{1}{2}(a-1)h + \frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2 + o(h^2)\right) = \arctan(X)$$

Avec $X = 1 + \frac{1}{2}(a-1)h + \frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2 + o(h^2)$

On utilise alors la première question avec $X \rightarrow 1$.

$$\begin{aligned}
 X - 1 &= \frac{1}{2}(a-1)h + \frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2 + o(h^2) \\
 (X - 1)^2 &= \left(\frac{1}{2}(a-1)h + \frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2 + o(h^2)\right)^2 = \frac{1}{4}(a-1)^2h^2 + o(h^2) \\
 o((X - 1)^2) &= o(h^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_a\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(X - 1) - \frac{1}{4}(X - 1)^2 + o((X - 1)^2) \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(a-1)h + \frac{1}{8}(1-a)(3+a)h^2 + o(h^2)\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}(a-1)^2h^2 + o(h^2)\right) \\
 &+ o(h^2) = \frac{\pi}{4} + \frac{a-1}{4}h + \left(-\frac{1}{16}(a-1)(a+3) - \frac{1}{16}(a-1)^2\right)h^2 + o(h^2) \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{a-1}{4}h - \frac{a-1}{16}((a+3) + (a-1))h^2 + o(h^2) \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{a-1}{4}h - \frac{(a-1)(a+1)}{8}h^2 + o(h^2)
 \end{aligned}$$

c)

$$g_a(x) - \frac{\pi}{4} = \frac{a-1}{4} \frac{1}{x} - \frac{(a-1)(a+1)}{8} \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Si $a \neq 1$ alors $g_a(x) \sim_0 \frac{a-1}{4} \frac{1}{x}$ et l'intégrale diverge.

Si $a = 1$ alors $g_a(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et l'intégrale converge.

Allez à : **II**

1.

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \underset{t=0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = 2n+1$$

$t \rightarrow \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0, donc J_n est une intégrale convergente en 0.

$$\frac{\sin((2n+1)t)}{t} \underset{t=0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n+1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} = 2n+1$$

$t \rightarrow \frac{\sin((2n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et prolongeable par continuité en 0, donc K_n est une intégrale convergente en 0.

2.

$$\begin{aligned} \sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t) &= 2 \cos\left(\frac{(2n+1)t + (2n-1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)t - (2n-1)t}{2}\right) \\ &= 2 \cos(2nt) \sin(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_n - J_{n-1} &= J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n-1)t)}{\sin(t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t) - \sin((2n-1)t)}{\sin(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos(2nt) \sin(t)}{\sin(t)} dt \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt) dt = 2 \left[\frac{\sin(2nt)}{2n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \left(\frac{\sin(n\pi)}{2n} - \frac{\sin(0)}{2n} \right) = 0 \end{aligned}$$

Par suite

$$J_n = J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$$

3.

$$f'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{-\sin^2(t) + t^2 \cos(t)}{t^2 \sin^2(t)}$$

Pour $t \neq 0$ $f'(t)$ est le produit et le quotient de fonction définie et continue en 0 donc f est C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right[\cup]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4.

$$f(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)} = \frac{(\sin(t) - t)}{t \sin(t)} = \frac{t + o(t^2) - t}{t(t + o(t))} = \frac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1 + o(t)} \rightarrow 0 = f(0)$$

f admet une limite nulle en 0, donc f est continue en 0.

$$\begin{aligned} -\sin^2(t) + t^2 \cos(t) &= -\left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)^2 + t^2 \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\ &= -t^2 \left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 + t^2 \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \\ &= -t^2 \left(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right) + t^2 \left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) t^4 + o(t^4) \\ &= -\frac{1}{6} t^4 + o(t^4) \end{aligned}$$

$$f'(t) \sim \frac{-\frac{1}{6}t^4}{t^4} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(t) = -\frac{1}{6}$$

Et f est continue en 0 et $f'(t)$ admet une limite en 0, donc f est de classe C^1 en 0, et pour tout $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \left[\cup \right] 0, \frac{\pi}{2}\right]$, f est C^1 sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

5.

$$J_n - K_n = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin((2n+1)t) dt$$

$-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt$	
$u'(t) = -\sin((2n+1)t)$	$u(t) = \frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1}$
$v(t) = f(t)$	$v'(t) = f'(t)$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt = \left[f(t) \frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \left(\frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} \right) dt$	

$$\begin{aligned} J_n - K_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin((2n+1)t) dt \\ &= \left[f(t) \frac{\cos((2n+1)t)}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \cos((2n+1)t) dt \\ &= f\left(\frac{\pi}{2}\right) \frac{\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} - f(0) \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \cos((2n+1)t) dt \\ &= -\frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \cos((2n+1)t) dt \end{aligned}$$

Car $f(0) = 0$ et $\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$$\begin{aligned} |J_n - K_n| &\leq \left| \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(t) \cos((2n+1)t) dt \right| \leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t) \cos((2n+1)t)| dt \\ &\leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt \end{aligned}$$

Comme f' est continue (f est C^1), il existe M tel que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f'(t)| \leq M$

$$|J_n - K_n| \leq \frac{1}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f'(t)| dt \leq \frac{M}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{M}{2n+1} \times \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$$

Lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$$

6.

$$\begin{aligned} x = (2n+1)t &\Leftrightarrow t = \frac{x}{2n+1} \Rightarrow dt = \frac{dx}{2n+1} \\ t = 0 &\Rightarrow x = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} &\Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$K_n = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{dx}{2n+1} = \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

7.

$$I_2(X) = \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\sin(x)}{x} dx$$

$I_2(X) = \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\sin(x)}{x} dx$	
$u'(x) = \sin(x)$	$u(x) = -\cos(x)$
$v(x) = \frac{1}{x}$	$v'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$I_{2,X} = \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^X - \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{(-\cos(x))}{(-x^2)} dx$	

$$I_2(X) = \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x} \right]_{\frac{\pi}{2}}^X - \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\cos(x)}{x^2} dx = -\frac{\cos(X)}{X} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \int_{\frac{\pi}{2}}^X \frac{\cos(x)}{x^2} dx$$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\cos(X)}{X} = 0$$

$$\left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$x \rightarrow \frac{1}{x^2}$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$ car $\alpha = 2 > 1$. Donc $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ converge.

Donc $I_2(X)$ admet une limite quand $X \rightarrow +\infty$.

8.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = K_0 + \lim_{X \rightarrow +\infty} I_2(X)$$

K_0 est une intégrale convergente et $\lim_{X \rightarrow +\infty} I_2(X)$ existe et est finie donc I est une intégrale convergente.

9. D'après 2°) $J_n = \frac{\pi}{2}$, d'après 4°)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \frac{\pi}{2}$$

Comme

$$I = \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Existe d'après 6.

$$\begin{aligned} \lim_{X \rightarrow +\infty} \int_0^X \frac{\sin(x)}{x} dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \frac{\pi}{2} \\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Allez à : **III**