

Contrôle continu final
Lundi 12 Janvier 2009**Durée : 2 heures****Les documents et les calculatrices sont interdits****Exercice 1.**

- 1) Montrer que la série de terme général $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$ est convergente.
- 2) Montrer que la série de terme général $v_n = \frac{2^n}{n^2} \sin^{2n} \alpha$ avec $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$ est convergente.
- 3) Montrer que la série de terme général $w_n = (-1)^n \sin \frac{\sqrt{n+1}}{n}$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n\sqrt{n}}$ est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 3.

- 1) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n} \cos n^2 x$ converge normalement sur \mathbb{R} .
- 2) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} \sin n^2 x$ est dérivable sur \mathbb{R} .

Exercice 4. Soit $f(x) = \arctan \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Développer $g(x) := \frac{-2x}{1+x^4}$ en série entière au voisinage de 0.
- 3) Développer $f(x)$ en série entière au voisinage de 0.

Exercice 5.

- 1) Trouver les séries entières solutions de l'équation différentielle

$$x^2 y'' + x^2 y' - 2y = 0.$$

- 2) Calculer la somme des séries obtenues.