Université Claude Bernard Lyon 1
Licence STS
Année 2010-2011

Math I Analyse
Interrogation écrite, le 21 janvier 2011, de 8heures à 10 heures

Question de cours

Enoncer le théorème des accroissements finis (Théorème de Lagrange).

Correction

Soit une fonction $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, avec $a < b$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$$

Exercice

Trouver l'unique fonction $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $y(0) = 1$ et telle que

$$y'(x) - x^2 y(x) = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Correction exercice

Il faut d'abord résoudre l'équation homogène

$$y'(x) - x^2 y(x) = 0$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = x^2$$

$$\ln|y(x)| = \frac{x^3}{3} + K$$

La solution générale de l'équation homogène est :

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{3}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ensuite on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre de la forme

$$y_P(x) = \lambda(x) e^{\frac{x^3}{3}}$$

On dérive

$$y_P'(x) = \lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} + \lambda(x) \frac{3x^2}{3} e^{\frac{x^3}{3}} = \lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} + \lambda(x) x^2 e^{\frac{x^3}{3}}$$

Ce que l'on remplace dans

$$y_P'(x) - x^2 y_P(x) = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$$

$$\lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} + \lambda(x) x^2 e^{\frac{x^3}{3}} - x^2 \lambda(x) e^{\frac{x^3}{3}} = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Comme prévu, les termes en $\lambda(x)$ s'éliminent

$$\lambda'(x) e^{\frac{x^3}{3}} = 2e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Puis on simplifie par $e^{\frac{1}{3}x^3}$

$$\lambda'(x) = 2$$

Comme on cherche une solution particulière

$$\lambda(x) = 2x$$

Ce que l'on remplace dans

$$y_P(x) = 2x e^{\frac{x^3}{3}}$$

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$y(x) = \lambda e^{\frac{x^3}{3}} + 2xe^{\frac{x^3}{3}} = (\lambda + 2x)e^{\frac{x^3}{3}}$$

Il reste à déterminer la constante λ à l'aide de la condition initiale $y(0) = 1$

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow (\lambda + 2 \times 0)e^{\frac{0^3}{3}} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

La solution recherchée est

$$y(x) = e^{\frac{x^3}{3}} + 2xe^{\frac{x^3}{3}}$$

Problème

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On définit la fonction $f_n: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} - 1$$

En particulier on a $f_2(x) = 2x - 1$, $f_3(x) = 2x + 3x^2 - 1$ et $f_4(x) = 2x + 3x^2 + 4x^3 - 1$.

1. Etudier les variations de f_n sur $[0,1]$.
2. (Question indépendante de la suite de l'exercice) Montrer que f_n est une bijection de $[0,1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$ et montrer que $f_n^{-1}: [f_n(0), f_n(1)] \to [0,1]$ est dérivable.
3. Démontrer qu'il existe un unique réel $a_n \in]0,1[$ tel que $f_n(a_n) = 0$.
4. Calculer a_2 et a_3.
5. Démontrer que, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in]0,1[$, on a
$$f_{n+1}(x) > f_n(x)$$
6. En déduire que $f_{n+1}(a_n) > 0$ et que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.
7. Montrer que $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente.
8. Notons a la limite de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$. Montrer que $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.

Dans la suite du problème on va calculer la valeur de la limite a. On définit la fonction $g_n: [0,1[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

9. Montrer que $g_n(x) = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$
10. Montrer que $2 + f_n(x) = g_n'(x)$ et en déduire que, pour tout $x \in [0,1[$, on a :
$$f_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n - 2x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2}$$
11. Sachant que $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$, pour tout $n \geq 2$, calculer
$$\lim_{n\to\infty} na_n^{n+1}, \lim_{n\to\infty} (n+1)a_n^n \quad \text{et} \quad (\text{en fonction de } a) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(a_n)$$
12. Démontrer que a est racine de l'équation $2x^2 - 4x + 1 = 0$.
13. Calculer la valeur de a.

Correction du problème

1. f_n est définie, continue et dérivable sur $[0,1]$, pour tout $n \geq 2$
$$f_n'(x) = 2 + 6x + \cdots + n(n-1)x^{n-2} \geq 2 > 0$$
Donc f_n est strictement croissante sur $[0,1]$
2. f_n est strictement croissante donc elle est injective, son ensemble d'arrivée est $[f_n(0), f_n(1)]$ donc elle est surjective, par conséquent f_n est une bijection de $[0,1]$ dans $[f_n(0), f_n(1)]$.
Comme $f_n'(x)$ est strictement positif, la bijection réciproque de f_n est dérivable.
3. $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 2 + 3 + \cdots + n - 1 = -1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 = -2 + \frac{n(n+1)}{2} > 0$
En fait peu importe la valeur de $f_n(1)$, l'essentiel est de s'apercevoir que $f_n(1) > 0$, comme f_n est une bijection de $]0,1[$ dans $]f_n(0), f_n(1)[$ et que $0 \in]f_n(0), f_n(1)[$, 0 admet un unique antécédant $a_n \in]0,1[$ c'est-à-dire tel que : $f_n(a_n) = 0$.

4.

$$f_2(x) = 2x - 1 \Rightarrow \ a_2 = \frac{1}{2}$$
$$f_3(x) = 2x + 3x^2 - 1 = 3x^2 + 2x - 1$$
$$3x^2 + 2x - 1 = 0$$

Admet comme racine $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{3}$ donc

$$a_3 = \frac{1}{3}$$

5.

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)x^n - 1 - (2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} - 1)$$
$$= (n+1)x^n > 0$$

Donc

$$\forall x \in [0,1], \qquad f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

6. D'après 5. Comme $a_n \in]0,1[$:

$$f_{n+1}(a_n) > f_n(a_n) = 0$$

On en déduit que

$$f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$$

Car $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$

Pour tout $n \geq 2$, f_{n+1} est strictement croissante donc, pour tout $n \geq 2$:

$$a_n > a_{n+1}$$

On en déduit que $(a_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante.

7. $(a_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante et minorée par 0, $(a_n)_{n\geq 2}$ converge.
8. La suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante donc pour tout $n \geq 2$, $a_n \geq \frac{1}{2}$, on en déduit que $a \geq \frac{1}{2}$. D'autre part $a_n > 0$ donc $a \geq 0$.
9. Pour tout $x \neq 1$, ce qui est le cas puisque $x \in [0,1[$.

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

10. Pour tout $x \in [0,1[$

$$2 + f_n(x) = 2 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} - 1 = f_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = g_n'(x)$$

On en déduit que

$$f_n(x) = g_n'(x) - 2 = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' - 2 = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} - 2$$
$$= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x^{n+1} + 1 - 2(x-1)^2}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 - 2(x^2 - 2x + 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n - 2x^2 + 4x - 1}{(x-1)^2}$$

11. Il s'agit, à chaque fois, de forme indéterminée, mais c'est la fonction puissance qui l'emporte sur n (et $n + 1$. On rappelle aussi que $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ entraine que $a_n^n \to 0$

$$\lim_{n\to\infty} na_n^{n+1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} (n+1)a_n^n = 0$$
$$f_n(a_n) = \frac{na_n^{n+1} - (n+1)a_n^n - 2a_n^2 + 4a_n - 1}{(a_n - 1)^2} \to \frac{-2a^2 + 4a - 1}{(a-1)^2}$$

12. Ce qui montre que a : vérifie $2a^2 - 4a + 1 = 0$
13. $2X^2 - 4X + 1 = 0$ à pour discriminant

$$\Delta = 16 - 4 \times 2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$$

Les solutions sont

$$X_1 = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Et

$$X_2 = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Comme $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, $X_2 \neq a$, on vérifie facilement que $0 \leq X_1 \leq \frac{1}{2}$, donc

$$a = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$