Université Lyon 1
Licence Sciences et Technologies
Année 2010-2011
Unité d'enseignement: Math I Algèbre
Contrôle final du 20 janvier 2011
Durée: 2 heures
Les documents, calculettes et téléphones portables ne sont pas autorisés.
Cet énoncé comporte deux pages.

Question 1.
On désigne le plan complexe par $\mathbb{C}$.

(1) Montrer que pour tout $z \in E$ on a $\frac{z-i}{z+i} \neq 1$.
Soit $f: \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C} \setminus \{1\}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$$

(2) Montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ tel que $\omega = f(z)$.
(3) Montrer que l'application f est injective.
Que peut-on en conclure sur l'application f ?
(4) Résoudre l'équation $(z-i)^3 + 8(z+i)^3 = 0$ dans $\mathbb{C}$.
Allez à : Correction question 1 :

Question 2.
(1) a. Déterminer le reste de la division de $N = 222^{333}$ par 7 et par 11.
b. Déterminer deux entiers u et v tels que $7u + 11v = 1$.
c. En déduire le reste de la division de N par 77.
(2) Toto veut faire don des livres de sa bibliothèque. Il en a plus de 10. S'il les répartit dans les cartons contenant 20 livres ou des cartons qui en contiennent 25, il lui reste toujours 7 livres. Quel est le nombre minimal de livres dans la bibliothèque de Toto ?
Allez à : Correction question 2 :
Question 3.
Répondre par vrai ou faux aux assertions qui suivent, en justifiant votre réponse par une preuve courte ou un contre-exemple.
(1) Il existe une infinité de couples d'entiers (u,v) tels que

$$231u + 110v = 23$$

(2) Soit un entier naturel $n \geq 2$. Tout facteur premier p de $n! + 1$ satisfait $p > n$.
(3) Soit n un entier naturel non nul. Il n'existe pas de triplet (x,y,z) d'entier impair tels que $x^n + y^n = z^n$.
(4) Soit n un entier naturel non nul. Il y a $\binom{n+2}{2}$ couples d'entiers naturels (x,y) pour lesquels

$$x + y \leq n$$

Allez à : Correction question 3 :

Question 4.
(1) Soit $A = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. Démontrer que $A = e^{\frac{2i\pi}{5}} - e^{\frac{3i\pi}{5}}$.
(2) Soit $B = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Démontrer que $B = e^{\frac{i\pi}{5}} - e^{\frac{4i\pi}{5}}$.
(3) On pose $\zeta = e^{\frac{i\pi}{5}}$.
a. Calculer ζ^5
b. Exprimer A et B en fonction de ζ.

c. En déduire que $1+A-B=0$.

(Indication : il peut être utile de reconnaître une somme des termes d'une suite géométrique.)

Remarque : A est la longueur du côté d'un décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 ; B est celle du côté d'un décagone étoilé. Cet exercice montre que la différence entre le périmètre d'un décagone étoilé et d'un décagone convexe est un entier.

Allez à : Correction question 4 :

CORRECTION

Correction question 1 :

(1) Pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$

$$1-\frac{z-i}{z+i}=\frac{z+i-(z-i)}{z+i}=\frac{2i}{z+i}\neq 0\Rightarrow\frac{z-i}{z+i}\neq 1$$

Allez à : Question 1

(2) Si $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$

$$\omega=f(z)\Leftrightarrow\omega=\frac{z-i}{z+i}\Leftrightarrow\omega(z+i)=z-i\Leftrightarrow\omega z+i\omega=z-i\Leftrightarrow\omega z-z=-i\omega-i\Leftrightarrow z(\omega-1)$$
$$=-i(\omega+1)\Leftrightarrow z=-i\frac{\omega+1}{\omega-1}=-i\frac{\omega-1+2}{\omega-1}=-i\left(1+\frac{2}{\omega-1}\right)=-i-\frac{2i}{\omega-1}\neq -i$$

Donc pour tout $\omega\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$, il existe $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$ tel que $\omega=f(z)$.

Allez à : Question 1

(3) Pour tout z_1,z_2 différent de $-i$,

$$f(z_1)=f(z_2)\Leftrightarrow\frac{z_1-i}{z_1+i}=\frac{z_2-i}{z_2+i}\Leftrightarrow(z_1-i)(z_2+i)=(z_2-i)(z_1+i)\Leftrightarrow z_1z_2+iz_1-iz_2+1$$
$$=z_2z_1+iz_2-iz_1+1\Leftrightarrow 2iz_1=2iz_2\Leftrightarrow z_1=z_2$$

Donc f est injective.

$f:\mathbb{C}\setminus\{-i\}\to\mathbb{C}\setminus\{1\}$ est bijective.

Allez à : Question 1

(4)

$$(z-i)^3+8(z+i)^3=0\Leftrightarrow(z-i)^3=-8(z+i)^3\Leftrightarrow\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3=-8=2^3e^{i\pi}$$

$$\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3=2^3e^{i\pi}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|f(z)|^3=2^3\\ \arg\left(f(z)^3\right)=\pi+2k\pi,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|f(z)|=2\\ 3\arg\big(f(z)\big)=\pi+2k\pi,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}|f(z)|=2\\ \arg\big(f(z)\big)=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},\end{array}\right.\quad k\in\{0,1,2\}$$
$$f(z)=2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)},\quad k\in\{0,1,2\}$$

D'après la première question

Allez à : Question 1

$$Z=f(z)\Leftrightarrow z=-i\frac{Z+1}{Z-1}=-i\frac{f(z)+1}{f(z)-1}=-i\frac{(f(z)+1)\left(\overline{f(z)}-1\right)}{(f(z)-1)\left(\overline{f(z)}-1\right)}$$

$$=-i\frac{|f(z)|^2+\overline{f(z)}-f(z)-1}{|f(z)|^2-\overline{f(z)}-f(z)+1}=-i\frac{4-\left(f(z)-\overline{f(z)}\right)-1}{4-\left(f(z)+\overline{f(z)}\right)+1}=-i\frac{3-2i\mathcal{I}m\left(f(z)\right)}{5-2\mathcal{R}e\left(f(z)\right)}$$

$$=\frac{-2\mathcal{I}m\left(f(z)\right)-3i}{5-2\mathcal{R}e\left(f(z)\right)}$$

Il y a trois solutions

$$z_0=\frac{-2\mathcal{I}m\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)-3i}{5-2\mathcal{R}e\left(2e^{\frac{i\pi}{3}}\right)}=\frac{-2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}-3i}{5-2\times 2\times\frac{1}{2}}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}-i$$

$$z_1=\frac{-2\mathcal{I}m\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)-3i}{5-2\mathcal{R}e\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right)}=\frac{-2\times 2\mathcal{I}m\left(e^{i\pi}\right)-3i}{5-2\times 2\mathcal{R}e\left(e^{i\pi}\right)}=\frac{-2\times 2\times 0-3i}{5-2\times 2\times(-1)}=-\frac{i}{3}$$

$$z_1=\frac{-2\mathcal{I}m\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right)-3i}{5-2\mathcal{R}e\left(2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right)}=\frac{-2\times 2\mathcal{I}m\left(e^{\frac{5i\pi}{3}}\right)-3i}{5-2\times 2\mathcal{R}e\left(e^{\frac{5i\pi}{3}}\right)}=\frac{-2\times 2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-3i}{5-2\times 2\times\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}-i$$

Allez à : Question 1

Correction question 2 :

(1) a.

$222=2\times 3\times 37$ donc 7 et 222 sont premiers entre eux, 7 est premier, on peut appliquer le petit théorème de Fermat

$$222^6\equiv 1\ [7]$$

Puis on divise 333 par 6

$$333=6\times 55+3$$

Par conséquent

$$222^{333}=222^{6\times 55+3}=(222^6)^{55}\times 222^3\equiv 1^{55}\times 222^3\ [7]\equiv 222^3\ [7]$$

On divise 222 par 7

$$222=7\times 31+5$$

$$222^{333}\equiv 222^3\ [7]\equiv(7\times 31+5)^3\ [7]\equiv 5^3\ [7]\equiv 25\times 5\ [7]\equiv 4\times 5\ [7]\equiv 6\ [7]$$

Comme $0\le 6<7$, 6 est le reste de la division euclidienne de 222^{333} par 7.

$222=2\times 3\times 37$ donc 11 et 222 sont premiers entre eux, 11 est premier, on peut appliquer le petit théorème de Fermat

$$222^{10}\equiv 1\ [11]$$

Puis on divise 333 par 10

$$333=10\times 33+3$$

Par conséquent

$$222^{333}=222^{10\times 33+3}=(222^{10})^{33}\times 222^3\equiv 1^{33}\times 222^3\ [7]\equiv 222^3\ [7]$$

On divise 222 par 11

$$222=11\times 20+2$$

$$222^{333}\equiv 222^3\ [11]\equiv(11\times 20+2)^3\ [11]\equiv 2^3\ [11]\equiv 8\ [11]$$

Comme $0\le 8<11$, 8 est le reste de la division euclidienne de 222^{333} par 11.

Allez à : Question 2

b. Il y a une solution évidente $7\times(-3)+11\times 2=1$

Allez à : Question 2

c.

$$N \equiv 6\ [7]$$
$$N \equiv 8\ [11]$$
$$7 \times (-3) + 11 \times 2 = 1 \Rightarrow 11 \times 2 = 1 + 3 \times 7$$

D'après le théorème des restes chinois il existe un unique x modulo $77 = 7 \times 11$ tel que $N \equiv x\ [77]$

$$x = 8 - 2 \times 11 \times 2 = 8 - 2 \times (1 + 3 \times 7) = -36 \equiv 41\ [77]$$

Vérifie

$$x = 8 - 4 \times 11 \equiv 8\ [11] \quad \text{et} \quad x = 6 - 6 \times 7 \equiv 6\ [7]$$

41 est la solution car $0 \leq 41 < 77$.

Autre méthode

$$N = 6 + 7k \quad \text{et} \quad N = 8 + 11l$$

Donc

$$6 + 7k = 8 + 11l \Rightarrow 7k - 11l = 2$$

Or

$$7 \times (-3) + 11 \times 2 = 1 \Rightarrow 7 \times (-6) + 11 \times 4 = 2$$

En soustrayant ces deux égalités

$$7(k + 6) - 11(l + 4) = 0 \Rightarrow 7(k + 6) = 11(l + 4)$$

Comme 7 divise $11(l + 4)$ et que 7 et 11 sont premiers entre eux, le théorème de Gauss permet d'affirmer que 7 divise $l + 4$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $l + 4 = 7n \Rightarrow l = -4 + 7l$, ce que l'on remplace dans $N = 8 + 11l = 8 + 11(-4 + 7l) = -36 + 77l = 41 + 77(l - 1)$

41 est la solution car $0 \leq 41 < 77$.

Allez à : Question 2

(2) On appelle N le nombre de livres de Toto, d'après l'énoncé

$$N \equiv 7\ [20] \quad \text{et} \quad N \equiv 7\ [25]$$

Il existe $k, l \in \mathbb{N}$ tels que $N = 7 + 20k$ et $N = 7 + 25l$ donc $20k = 25l$, on simplifie par 5, par conséquent $4k = 5l$, 4 et 5 sont premiers entre eux, 4 divise $5l$, d'après le théorème de Gauss, 4 divise l, il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $l = 4u$. On en déduit que $N = 7 + 25 \times 4u$, $u = 0$ n'est pas solution car $N < 10$, $u = 1$ est la solution $N = 7 + 100 = 107$

Allez à : Question 2

Correction question 3 :

(1) $231 = 3 \times 7 \times 11$ et $110 = 2 \times 5 \times 11$ donc $PGCD(231{,}110) = 11$ ne divise pas 23, il n'y a pas de solution.

(2) p divise $n! + 1$ donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n! + 1 = pk$, si $p < n$ alors p divise $n!$ et il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $n! = pl$, avec ces deux égalités on a $pl + 1 = pk$ ce qui équivaut $p(k - l) = 1$, ce qui entraine que $p = 1$, il y a une contradiction par conséquent tout diviseur de $n! + 1$ est strictement plus grand que n.

(3) Si x, y, z sont impairs alors $x^n \equiv 1\ [2]$, $y^n \equiv 1\ [2]$ et $z^n \equiv 1\ [2]$, ce qui entrainerait, si l'hypothèse était bonne que $2 \equiv 1\ [2]$, ce qui est faux.

(4)

Les couples d'entiers positifs qui vérifient $x + y = k$ sont

$$(0, k), (1, k - 1), (2, k - 2), \dots, (k - 2{,}2), (k - 1{,}1), (k, 0)$$

Il y en a $k + 1$. Le nombre d'entiers positifs qui vérifient $x + y \leq n$ est la somme du nombre des couples d'entiers positifs qui vérifient $x + y = k$ pour $k \in \{0{,}1, \dots, n\}$

Il y en a donc

$$1 + 2 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} = \binom{n + 2}{2}$$

Allez à : Question 3

Correction question 4 :

(1)

$$A = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-i\pi}e^{\frac{3i\pi}{5}} = e^{\frac{2i\pi}{5}} + e^{-\frac{2i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$$

(2)

$$B = e^{\frac{i\pi}{5}} + e^{-i\pi}e^{\frac{4i\pi}{5}} = e^{\frac{i\pi}{5}} + e^{-\frac{i\pi}{5}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$$

(3)

a.

$$\zeta^5 = \left(e^{\frac{i\pi}{5}}\right)^5 = e^{i\pi} = -1$$

b.

$$A = \zeta^2 - \zeta^3; B = \zeta - \zeta^4$$

c.

$$1 + A - B = 1 + \zeta^2 - \zeta^3 - (\zeta - \zeta^4) = 1 + (-\zeta) + (-\zeta)^3 + (-\zeta)^4 = \frac{1 - (-\zeta)^5}{1 - (-\zeta)} = \frac{1 + \zeta^5}{1 + \zeta} = 0$$

Car $\zeta^5 = \left(e^{\frac{i\pi}{5}}\right)^5 = e^{i\pi} = -1$

Allez à : Question 4