Université Claude Bernard Lyon 1
Licence Sciences et Technologie

Unité d' enseignement: Math I Algèbre
Contrôle continu final
13 janvier 2009 - durée 2 heures

- Les documents et les calculettes ne sont pas autorisés.
- Les questions sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre de votre choix.
- Les questions étoilées sont facultatives.

Question : 1.
Soient E et F deux ensembles non vides et $f: E \to F$ une application.
(1) On suppose qu'il existe une application $r: E \to F$ telle que $r \circ f = id_E$. Montrer qu'alors f est injective.
(2) On suppose f injective. Construire une application $r: F \to E$ telle que $r \circ f = id_E$.
Allez à : Correction question : 1

Question : 2.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$
(1) Enoncer une condition nécessaire et suffisante pour que la classe $\bar{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'un entier $k \in \mathbb{N}$ admette un inverse (pour la multiplication) dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
(2) Faire la liste des éléments de $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$ qui sont inversibles (pour la multiplication).
Allez à : Correction question : 2

Question : 3.
(1) Déterminer tous les couples d'entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $11u + 7v = 1$.
(2) Déterminer les restes de la division euclidienne de 2^{1000} par 7 et par 11.
(3)* Déduire des deux questions qui précèdent le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 77.
Allez à : Correction question : 3

Question : 4.
(1) Résoudre en coordonnées cartésiennes l'équation dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 = 2 + 2i$$

(2) Ecrire $2 + 2i$ sous forme polaire. Résoudre alors l'équation en coordonnées polaires.
(3) Déduire des deux questions qui précèdent la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
Allez à : Correction question : 4

Question : 5.
On considère les groupes $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (pour l'addition). On notera $\bar{l}$ la classe de l'entier l dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\hat{l}$ la classe de l'entier l dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
(1) Montrer que l'application

$$f: \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$\bar{l} \mapsto \hat{l}$$

est bien définie et que c'est un morphisme surjectif de groupes.
(2) Déterminer le noyau $\ker(f)$ de f et dresser sa table de composition.
(3)* Construire un isomorphisme entre $\ker(f)$et $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
Allez à : Correction question : 5

CORRECTION

Correction question : 1.
(1)

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow r\big(f(x_1)\big) = r\big(f(x_2)\big) \Rightarrow r \circ f(x_1) = r \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Donc f est injective.
(2) A chaque $y \in F$ il faut lui associer une unique valeur $x = r(y)$ telle que $r\big(f(x)\big) = x$

Si $y \in f(E) \subset F$, alors il existe un unique antécédent $x \in E$ à y car f est injective, on pose $y = r(y)$

Si $y \notin f(E)$, alors on associe n'importe quel élément $x_0 \in E$ à y.

Vérifions que tout va bien, pour tout $x \in E$:

$$r(f(x)) = r(y)$$

Avec $y = f(x)$, x étant l'unique antécédent de y

$$r(f(x)) = x$$

Ce qui montre bien que $r \circ f = id_E$

Remarque :

Cette question à l'air compliquée, mais si on part du résultat

$$\forall x \in E, r(f(x)) = x$$

On voit bien que l'on a besoin de définir r unique sur les y de la forme $f(x)$, c'est-à-dire sur $f(E)$, pour les autres cela n'a pas d'importance.

D'autre part, il vaut mieux appeler y la variable de r puisque cette application va de F, l'ensemble d'arrivée de f dans E. Rien n'empêche de l'appeler x mais cela risque de porter à confusion si on appelle aussi x les éléments de E.

Allez à : Question : 1

Correction question : 2.

(1) il s'agit d'une question de cours.

La classe $\overline{k} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'un entier $k \in \mathbb{N}$ admette un inverse (pour la multiplication) dans l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si et seulement si k et n sont premiers entre eux.

(2) $\{\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{11}, \overline{13}, \overline{17}, \overline{19}\}$

Allez à : Question : 2

Correction question : 3.

(1) Comme d'habitude, soit on trouve une solution particulière « évidente », soit on utilise l'algorithme d'Euclide.

$$11 \times 2 + 7 \times (-3) = 1$$

Est une solution évidente

Si on ne le vois pas

$$11 = 1 \times 7 + 4$$
$$7 = 1 \times 4 + 3$$
$$4 = 1 \times 3 + 1$$

$$1 = 4 - 1 \times 3 = 4 - 1 \times (7 - 1 \times 4) = -1 \times 7 + 2 \times 4 = -1 \times 7 + 2 \times (11 - 1 \times 7)$$
$$= 2 \times 11 - 3 \times 7$$

On trouve le même résultat mais cela aurait pu être un autre couple de résultats.

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} 11u + 7v = 1 \\ 11 \times 2 + 7 \times (-3) = 1 \end{cases}$$

$L_1 - L_2$ donne $11(u - 2) + 7(v + 3) = 0$, ce qui équivaut à

$$11(u - 2) = -7(v + 3)$$

11 divise $-7(v + 3)$ et 11 est premier avec 7 donc, d'après le théorème de Gauss, 11 divise $-(v + 3)$, par conséquent il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-(v + 3) = 11k$, ce qui équivaut à $v = -11k - 3$, ce que l'on remplace dans $11(u - 2) = -7(v + 3)$, ce qui donne $11(u - 2) = 7 \times 11k$, puis en simplifiant par 11, $u = 2 + 7k$.

Réciproque

$$11u + 7v = 11(2 + 7k) + 7(-11k - 3) = 11 \times 2 + 11 \times 7k - 7 \times 11k + 7 \times (-3) = 1$$

(2) D'après le petit théorème de Fermat, comme 7 est premier

$$2^6 \equiv 1 \ [7]$$

Comme $1000 = 6 \times 166 + 4$:

$$2^{1000} = 2^{6\times 166+4} = (2^6)^{166} \times 2^4 \equiv 1^{166} \times 16\ \ [7] \equiv 2\ \ [7]$$

$0 \leq 2 < 7$, donc le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 7 est 2.

D'après le petit théorème de Fermat, comme 11 est premier

$$2^{10} \equiv 1\ \ [11]$$

Comme $1000 = 10 \times 100$:

$$2^{1000} = 2^{10\times 100} = (2^{10})^{100} \equiv 1^{100}\ \ [11] \equiv 1\ \ [10]$$

$0 \leq 1 < 10$, donc le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 11 est 1.

(3) D'après la question (1) il existe $(n, l) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 2^{1000} = 7n + 2 \\ 2^{1000} = 11l + 1 \end{cases}$$

En faisant $L_2 - L_1$, on trouve

$$0 = 11l + 1 - 7n - 2$$

Ce qui équivaut à

$$11l - 7n = 1$$

D'après la question (2), il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\begin{cases} l = 2 + 7k \\ n = 1 + 11k \end{cases}$$

On remplace alors l dans $2^{1000} = 11l + 1$ (ou n dans $2^{1000} = 11l + 1$).

$$2^{1000} = 11(2 + 7k) + 1 = 23 + 77k$$

Comme $0 \leq 23 < 77$, le reste de la division euclidienne de 2^{1000} par 77 est 23.

Allez à : Question : 3

Correction question : 4.

(1) On cherche z sous la forme $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$

$$z^2 = 2 + 2i \Leftrightarrow (a + ib)^2 = 2 + 2i \Leftrightarrow a^2 - b^2 + 2iab = 2 + 2i \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ 2ab = 2 \end{cases}$$

On trouve une troisième équation en écrivant que

$$|z^2| = |2 + 2i| \Leftrightarrow |z|^2 = \sqrt{2^2 + 2^2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = \sqrt{8} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2\sqrt{2}\quad L_3$$

En faisant la somme des lignes L_1 et L_3

$$2a^2 = 2 + 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a^2 = 1 + \sqrt{2} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

En faisant la différence des lignes L_3 et L_1

$$2b^2 = 2\sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow b^2 = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

La ligne L_2 indique que a et b sont de même signe donc

$$z = \sqrt{1 + \sqrt{2}} + i\sqrt{\sqrt{2} - 1} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{1 + \sqrt{2}} - i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

(3) On met le module de $2 + 2i$ en facteur

$$2 + 2i = 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{2\sqrt{2}}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On résous $z^2 = 2 + 2i$ en utilisant la forme polaire de $2 + 2i$

$$z^2 = 2 + 2i \Leftrightarrow \begin{cases} |z^2| = |2 + 2i| \\ \arg(z^2) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z|^2 = 2\sqrt{2} \\ 2\arg(z) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = \sqrt{2\sqrt{2}} \\ \arg(z) = \dfrac{\pi}{8} + k\pi,\ \ k \in \{0,1\} \end{cases}$$

Donc

$$z_k=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)},\quad k\in\{0,1\}$$

Cela donne deux solutions

$$z=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}\quad et\quad z=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}e^{i\pi}=-\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}$$

Remarque :

On pouvait aussi utiliser les formules du cours.

En comparant les résultat du (2) et du (3), il est clair que

$$\sqrt{1+\sqrt{2}}+i\sqrt{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{8}}=\sqrt{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

D'où l'on déduit que

$$\sqrt{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Et enfin

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{\sqrt{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

Allez à : Question : 4

Correction question : 5.

(1) Le problème est de savoir si on change de représentant dans $\bar{l}$, est-ce l'on obtient la même classe $\hat{l}$?

Et bien regardons

Soit $l+6k,\ k\in\mathbb{Z}$ un représentant quelconque de $\bar{l}=\{l+6k,\ k\in\mathbb{Z}\}$

Alors

$$\widehat{l+6k}=\{l+6k+2l,\qquad l\in\mathbb{Z}\}=\{l+2(3k+l),l\in\mathbb{Z}\}=\{l+2n,n\in\mathbb{Z}\}=\hat{l}$$

Autre méthode

$$\bar{a}=\bar{l}\Leftrightarrow a\equiv l\ \ [6]\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},a=l+6k\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z},a=l+2(3k)\Rightarrow a\equiv l\ \ [2]\Leftrightarrow\hat{a}=\hat{l}$$

Cela montre que f est bien définie.

$$\forall\bar{a},\bar{b}\in\frac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}},f\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=f\left(\overline{a+b}\right)=\widehat{a+b}=\hat{a}+\hat{b}=f(\bar{a})+f\left(\bar{b}\right)$$

Ce qui montre que f est un morphisme de groupe.

Remarque :

On a noté les additions dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de la même façon, en toute rigueur, il faudrait utiliser deux notations distinctes, mais bon !

Comme il n'y a que deux éléments dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}=\{\hat{0},\hat{1}\}$, on va simplement vérifier que chacun de ces éléments admet un antécédent.

$$f\left(\bar{0}\right)=\hat{0}\quad\text{et}\quad f\left(\bar{1}\right)=\hat{1}$$

Cela montre que f est surjective.

Remarque :

$$f\left(\bar{2}\right)=\hat{2}=\hat{0},f\left(\bar{4}\right)=\hat{4}=\hat{0}\quad\text{et}\quad f\left(\bar{3}\right)=\hat{3}=\hat{1},f\left(\bar{5}\right)=\hat{5}=\hat{1}$$

(2) Grace à la remarque

$$\ker(f)=\{\bar{0},\bar{2},\bar{4}\}$$

Et sa table de composition est

$+$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$

$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

(3) il faut déjà donner une notation aux classes de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$: par exemple $\dot{l}$.

Soit $\varphi\colon \ker(\varphi) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ défini par

$$\varphi(\overline{0}) = \dot{0}, \qquad \varphi(\overline{2}) = \dot{1} \quad \text{et} \quad \varphi(\overline{4}) = \dot{2}$$

Si l'on fait ainsi, il faut vérifier que pour tout $\overline{a}$ et $\overline{b}$ dans $\ker(f)$ on a :

$$\varphi(\overline{a} + \overline{b}) = \varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$$

C'est un peu long, alors on va définir φ de la façon suivante : les éléments de $\ker(f)$ sont de la forme $2\overline{l}$, avec $\overline{l} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ et $\varphi(2\overline{l}) = \dot{l}$. Comme dans la question 5 (1) il faut vérifier que φ est bien définie, autrement dit il faut montrer que $\overline{a} = \overline{l} \Rightarrow \varphi(\overline{a}) = \varphi(\overline{l})$:

$$\varphi(2\overline{a}) = \dot{a} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi(2\overline{a}) = a + 3k$$

Mais $\overline{a} = \overline{l} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, a = l + 6n$

$$\varphi(2\overline{a}) = \dot{a} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \varphi(2\overline{a}) = a + 3k \Leftrightarrow \exists k, n \in \mathbb{Z}, \varphi(2\overline{a}) = l + 6n + 3k = l + 3(2n + k)$$

$$\Leftrightarrow \varphi(2\overline{a}) = \dot{l} = \varphi(2\overline{l})$$

Donc si on change de représentant dans $\overline{l}$ alors cela ne change par la valeur de φ.

Maintenant cela va être plus simple $\forall \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$$\varphi(2\overline{a} + 2\overline{b}) = \varphi\left(\overline{2(a+b)}\right) = \overset{\cdot}{\widehat{a+b}} = \dot{a} + \dot{b} = \varphi(2\overline{a}) + \varphi(2\overline{b})$$

φ est un morphisme et le fait que $\varphi(\overline{0}) = \dot{0}$, $\varphi(\overline{2}) = \dot{1}$ et $\varphi(\overline{4}) = \dot{2}$ montre que φ est bijective, bref c'est un isomorphisme de groupe.

Allez à : Question : 5