Feuille d'exercices n° 7

Intégration sur un segment

Exercice 1. On note $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ \frac{1}{1+x^2} \leq y \leq e^{x/2}\}$.

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $\dfrac{1}{1+x^2} \leq e^{x/2}$.
2. Dessiner D.
3. Calculer l'aire de D.

Exercice 2.

1. En utilisant la relation : $\forall x \in \mathbf{R}\ (\cos x)^2 = 1 - (\sin x)^2$, déterminer les primitives sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto (\cos x)^3$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R},\ (\cos x)^4 = \frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}$. *On utilisera la formule d'Euler :* $\forall x \in \boldsymbol{R},\ \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

   (b) Calculer les primitives sur $\mathbf{R}$ de $x \mapsto (\cos x)^4$.

Exercice 3. Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^e \ln x\, dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 x e^{1+x^2} dx$
3. $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 (x^3+1)e^{-x}\, dx$
5. $\displaystyle\int_1^2 \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\, dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{5\,\mathrm{ch}\, x + 3\,\mathrm{sh}\, x + 4} dx$
7. $\displaystyle\int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ (poser $x = \cos\theta$)
8. $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ (poser $t = \sqrt{x+1}$)

Exercice 4. Déterminer, sur un intervalle où le calcul est valable, les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$
2. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-3x+2}\, dx$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-4x+13}\, dx$

Exercice 5. Pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$, on pose $B(p, q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^2$. Comparer $B(p, q)$ et $B(q, p)$.
2. Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$, $B(p, q) = \dfrac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$.
3. Calculer $B(0, n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. En déduire la valeur de $B(p, q)$ pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^2$.

Exercice 6. *Intégrales et parité*

Soit $a > 0$. Soit $f : [-a, a] \to \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[-a, a]$.

1. Montrer que si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.
2. Montrer que si f est impaire , alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

Exercice 7.

Soit f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on note $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

On définit $g : \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ par : pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $g(x) = \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$.

1. Exprimer pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $g(x)$ en fonction de valeurs prises par la fonction F.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité sur $\mathbf{R}$.

Exercice 8.

On définit la fonction $F :]0,1[\to \mathbf{R}$ par : $\forall x \in]0,1[\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t}dt$.

1. Pour $x \in]0,1[$, quel est le signe de $F(x)$?
2. Montrer que F est dérivable en tout point de $]0,1[$ et calculer sa dérivée.
3. Pour $x \in]0,1[$, montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{t\ln t}dt = \ln(2)$.
4. Pour $x \in]0,1[$, montrer les inégalités : $x^2\ln(2) \leq F(x) \leq x\ln(2)$.
5. Montrer que l'on peut prolonger F par continuité sur $[0,1]$.

Exercice 9. Étudier la limite quand n tend vers $+\infty$ des suites $(u_n)_{n\geq 1}$ définies par : pour $n \geq 1$,

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$
2. $u_n = \displaystyle\frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n-1} k^2 \sin\left(k\pi/n\right)$
3. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$

Exercice 10. Soit $p \in \mathbf{N}$. On pose pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$. Déterminer un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 11. *D'autres calculs pour s'entraîner*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^1 \ln(x^2+3)\,dx$
3. $\displaystyle\int_2^3 x^2\ln(x^6-1)\,dx$ (poser $t = x^3$)
4. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1+x+x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (poser $x = \cos\theta$)