# Feuille d'exercices n° 4
## Séries numériques

**Exercice 1.** Montrer que, si la série $\sum u_n$ est à termes positifs et converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.

**Exercice 2.** On considère deux séries à termes positifs $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergentes.
Étudier la nature des séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.

**Exercice 3.** Étudier la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_n u_n$ où

1. $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ pour tout $n \geq 2$ ;
2. $u_n = \frac{1}{(4n-1)(4n+3)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ;
3. $u_n = \left(\frac{-1}{3}\right)^n$ pour tout $n \geq 2$.

**Exercice 4.**
1. Étudier la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{n+2}{n^3-2n^2-n+2}$ pour tout $n \geq 3$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{X+2}{X^3-2X^2-X+2}$.
3. Calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 3} u_n$.

**Exercice 5.** Étudier la nature de la série de terme général $u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{1}{n2^n}$ ; $\forall n \geq 1$
2. $u_n = \frac{3n}{1+\ln n}$ ; $\forall n \geq 1$
3. $u_n = \frac{1+n\sqrt{n}}{n^2}$ ; $\forall n \geq 1$
4. $u_n = \left(\frac{(n+1)^2}{n^2+1}\right)^{-n^2}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$
5. $u_n = \frac{1}{n^{1+\frac{2}{n}}}$ ; $\forall n \geq 1$
6. $u_n = \frac{\ln n}{n}$ ; $\forall n \geq 1$
7. $u_n = \frac{3^n+n^3}{\sin(4^n)+4^n}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$
8. $u_n = \frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}$ ; $\forall n \geq 1$
9. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$
10. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ; $\forall n \geq 2$
11. $u_n = \frac{n^{100}\,3^n}{n!}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$
12. $u_n = \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$ ; $\forall n \geq 1$
13. $u_n = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n-1)!}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}^\star$
14. $u_n = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$ ; $\forall n \geq 1$
15. $u_n = (-1)^n \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$
16. $u_n = \sin\left(\left(n + \dfrac{1}{n}\right)\pi\right)$ ; $\forall n \geq 1$
17. $u_n = (-1)^n(\sqrt{1+n} - \sqrt{n})$ ; $\forall n \in \mathbb{N}^\star$
18. $u_n = \sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^{3/4}}} - \exp\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2n^{3/4}}\right)$
19. $u_n = \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{1-n^{(n-3/4)}}{n^n}$ ; $\forall n \geq 1$
20. $u_n = \sqrt{1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}}$ ; $\forall n \geq 1$
21. $u_n = \ln(n \sin\frac{1}{n})$ ; $\forall n \geq 1$
22. $u_n = \frac{(4n-1)!\,3^{2n}\,2^{3n}}{(3n)!\,n!\,5^{4n}}$ ; $\forall n \in \mathbb{N}$
23. $u_n = \frac{n\,3^n}{(\ln n)^{\sqrt{n}}}$ ; $\forall n \geq 1$.
24. $u_n = \frac{2+\sin n}{n^{1/2}\ln n}$ ; $\forall n \geq 1$.
25. $u_n = \frac{1+\sin n}{n^{1/2}\ln n}$ ; $\forall n \geq 1$.

**Exercice 6.** 1. Étudier les variations de la fonction $f : [1, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+1}$.

2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sqrt{n}+1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 7.** Étudier suivant les valeurs de $a \in \mathbb{C}$, la nature (convergence absolue, semi-convergence, divergence) de la série de terme général $u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$,
2. $u_n = na^{n-1}$.

**Exercice 8.** Quelle est la nature de la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ? Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 9.** On admet que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, où

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!}$.
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!2^{n-k}}$.

**Exercice 10.** On considère la série numérique de terme général $u_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Le critère de d'Alembert permet-il de donner la nature de la série $\sum u_n$ ?
   (b) Donner la nature de la série $\sum u_n$ en utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.
2. Soient $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes strictement positifs qui vérifient la propriété suivante :

$$\text{il existe un entier } N \in \mathbb{N} \text{ tel que, pour tout } n \geq N,\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}\ .$$

   (a) Montrer que : $\forall n \geq N$, $a_{n+1} \leq \dfrac{a_N}{b_N}\, b_{n+1}$.
   (b) En déduire que si $\sum b_n$ converge alors $\sum a_n$ converge et que, si $\sum a_n$ diverge alors $\sum b_n$ diverge.

3. Soit $\alpha$ un réel non nul et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

   (a) Soit $\beta > 0$. On pose, pour tout $n > 0$, $b_n = \dfrac{1}{n^\beta}$. Montrer que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha - \beta}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

   (b) Si $\alpha > 1$, montrer que la série $\sum a_n$ converge (choisir un réel $\beta \in ]1, \alpha[$).
   (c) Si $\alpha < 1$, montrer que la série $\sum a_n$ diverge (choisir un réel $\beta \in ]\alpha, 1[$).
4. En utilisant la question 3, retrouver la nature de la série $\sum u_n$.