Fiche 3 : Espaces vectoriels normés

Normes

Exercice 1. *Les fonctions N suivantes sont-elles des normes sur les espaces considérés ?*

1. $N : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$.
2. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto |x| + 2|y|$.
3. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \left(\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}\right)^2$.
4. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto |x + y| + |x|$.
5. $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto \max(|x + 3y|, |x - y|)$.
6. $N : C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.
7. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|^2$.
8. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]} |f(x)|$.
9. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$.
10. $N : C([0; 2\pi], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \int_0^{2\pi} |f(t)\sin t|\, dt$.
11. $N : C([0; 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},\ f \longmapsto \left|\int_0^1 f(t)dt\right|$.

Exercice 2. Soit $(X, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Etant donné deux parties A et B non vides de X on pose

$$d(A, B) = \inf_{a\in A, b\in B} \|a - b\|.$$

On note $\delta(A)$ le diamètre d'une partie bornée A de X :

$$\delta(A) = \sup_{a,b\in A} \|a - b\|.$$

Montrer que si A et B sont bornées, alors

$$\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B) + d(A, B).$$

Peut-on avoir égalité ?

Ouverts, fermés, intérieur, adhérence

Exercice 3. *Les parties suivantes de $\mathbb{R}^n$ sont-elles ouvertes ? fermées ?*

1. $]a; b]$ *et* $[a; +\infty[$ *pour* a *et* b *réels tels que* $a < b$,
2. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < |x - 1| < 1\}$,

3. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq x \leq z\}$,
4. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| < 1$ *et* $|y| \leq 2\}$,
5. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{Q}$ *et* $y \in \mathbb{Q}\}$,
6. $E = \{(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p;\ x_1^2 + ... + x_p^2 \leq 5\}$ *où* $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. On suppose $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont des parties d'un espace vectoriel normé.

1. On pose $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$. Montrer que $\overline{B_n} = \bigcup_{i=1}^n \overline{A_i}$.
2. On pose $B = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$. Montrer que $\overline{B} \supset \bigcup_{i=1}^\infty \overline{A_i}$. Trouver un exemple pour lequel $\overline{B} \neq \bigcup_{i=1}^\infty \overline{A_i}$.

Exercice 5. Soient A et B deux parties disjointes d'un espace vectoriel normé X. Montrer que si A est ouvert, alors $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Est-ce encore le cas si on suppose A est fermé ?

Exercice 6. Soit $\overset{\circ}{E}$ l'ensemble des points intérieurs d'un ensemble E dans un espace vectoriel normé X. **Rappel :** Un point x est un point *intérieur* de E s'il existe un voisinage N de x avec $N \subseteq E$.

1. Montrer que $\overset{\circ}{E}$ est ouvert.
2. Montrer que E est ouvert ssi. $E = \overset{\circ}{E}$.
3. Montrer que si $G \subseteq E$ et G est ouvert alors $G \subseteq \overset{\circ}{E}$. En déduire que $\overset{\circ}{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E.
4. Montrer que $\overset{\circ}{E} = X \setminus \overline{(X \setminus E)}$ et que $\overline{E} = X \setminus (X \overset{\circ}{\setminus} E)$
5. Est-ce-que $\overset{\circ}{E} = \overset{\circ}{\overline{E}}$?
6. Est-ce-que $\overline{E} = \overline{\overset{\circ}{E}}$?

Exercice 7. *Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière des ensembles suivants. Déterminer également s'ils sont ouverts, fermés, ni ouverts ni fermés.*

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$,
$B = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$,
$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x > y + 1\}$.

Exercice 8. Soit X un espace vectoriel normé et A et B deux parties de X d'intérieur vide (c'est à dire $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{B} = \emptyset$).

1. L'ensemble $A \cup B$ est-il encore d'intérieur vide ?
2. Même question en supposant A et B fermés.
3. Même question en supposant A et B ouverts.

Exercice 9. Soit $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de taille $n \times n$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, la matrice $A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible.

2. Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Application : Soit A, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec N nilpotente et $AN = NA$. Montrer que :

$$\det(A+N) = \det A.$$

Compacité

Exercice 10. On pose $K = \{0\} \cup \{1/n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Montrer directement (sans utiliser le théorème de Borel-Lebesgue ou de Heine-Borel) que K est compact.

Exercice 11. Donner un exemple d'un recouvrement de $]0,1[$ n'admettant pas un sous-recouvrement fini.

Exercice 12. (Compacité de la boule unité fermée et dimension)

1. Soit $(E, \|.\|)$ un espace verctoriel normé. On suppose que la boule unité fermée de E, notée $B_F(0_E, 1)$, est compacte. Montrer que $B_F(0_E, 1)$ peut être recouverte par un nombre fini de boules fermées de rayon $1/2$, c'est-à-dire que :

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \ \exists (y_1, .., y_n) \in E^n, \ \text{t.q. } B_F(0_E, 1) \subset \cup_{i=1}^n B_F(y_i, \tfrac{1}{2}).$$

   Dans la suite, on notera $F = \text{vect}(y_1, .., y_n)$.
2. On suppose toujours que $B_F(0_E, 1)$ est compacte.
   (a) Soit $u \in E$ tel que $\|u\| \leq 1$. Montrer qu'il existe $i_1 \in \{1, .., n\}$ et $x_1 \in E$ tels que :

$$u = y_{i_1} + \tfrac{1}{2}x_1, \quad \|x_1\| \leq 1.$$

   (b) Montrer alors qu'il existe $i_2 \in \{1, .., n\}$ et $x_2 \in E$ tels que :

$$u = y_{i_1} + \tfrac{1}{2}y_{i_2} + \tfrac{1}{4}x_2, \quad \|x_2\| \leq 1.$$

   (c) En déduire que F est dense dans $B_F(0_E, 1)$.
   (d) En déduire que l'espace vectoriel E est de dimension finie.
3. Montrer le théorème de compacité de Riesz :
   Théorème : dans un espace vectoriel normé E, la boule unité fermée est compacte si, et seulement si E est de dimension finie.