Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

Analyse Réelle, L3 Mathématiques pour l'enseignement 13 décembre 2019. Durée : 1 h 30

Partiel n^{o} 2

On veillera à justifier soigneusement toutes les réponses. On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Presque toutes les questions peuvent être traitées en admettant les résultats des questions précédentes.

Question de Cours.

1. Soit $f : X \to Y$ où X et Y sont deux espaces métriques. Donner la définition de "f est uniformément continue".
2. Soit $f : X \to Y$ où X et Y sont deux espaces métriques. Montrer que si f est uniformément continue alors f est continue.

Exercice 1. On se propose de montrer qu'une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ croît de façon au plus linéaire à l'infini. Autrement dit, si $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une application uniformément continue, on veut démontrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on ait $|f(x)| \leq ax + b$.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que
$$\forall (x, y) \in ([0, +\infty[)^2, \quad \Big(|x - y| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq 1\Big).$$
2. Montrer que pour tout $x \in [0, \alpha]$, $|f(x)| \leq |f(0)| + 1$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [n\alpha, (n + 1)\alpha]$, $|f(x)| \leq |f(0)| + (n + 1)$.
4. Montrer qu'il existe a, b dans $\mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [n\alpha, (n+1)\alpha]$, $ax + b \geq |f(0)| + (n+1)$ et conclure.

Exercice 2. On demande à un étudiant de calculer
$$I = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos^2(x)}.$$
Sur la copie de l'étudiant, on lit :

> Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\cos^2(x) = \dfrac{1}{1 + \tan^2(x)}$ donc
> $$I = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1 + \frac{1}{1+\tan^2(x)}} = \int_0^\pi \frac{(1 + \tan^2(x))\mathrm{d}x}{2 + \tan^2(x)}.$$
> On pose $t = \tan(x)$ donc $\mathrm{d}t = (1 + \tan^2(x))\mathrm{d}x$ et on obtient :
> $$I = \int_{\tan(0)}^{\tan(\pi)} \frac{\mathrm{d}t}{2 + t^2}.$$
> Comme $\tan(0) = \tan(\pi) = 0$, on obtient que $I = 0$.

1. Pourquoi est-ce manifestement faux ?
2. Où est l'erreur de raisonnement ?
3. Quelle est la valeur de I ?

Exercice 3. Soit $\varphi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère la fonction $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(t) = \int_{-t}^{t} \varphi(s)\mathrm{d}s - t(\varphi(t) + \varphi(-t)) + kt^3, \quad t \in [-1,1],$$

où le réel k est choisi tel que $\psi(1) = 0$.

1. Montrer que ψ est dérivable sur $[0,1]$ et que sa dérivée est donnée par :
$$\psi'(t) = -t(\varphi'(t) - \varphi'(-t)) + 3kt^2, \quad t \in [0,1].$$
2. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $\psi'(\theta) = 0$.
3. Exprimer le réel k en fonction de φ' et du réel θ.
4. En déduire qu'il existe $\eta \in]-1,1[$ tel que $k = \frac{2}{3}\varphi''(\eta)$.
5. Montrer alors que
$$\int_{-1}^{1} \varphi(s)\mathrm{d}s = \varphi(1) + \varphi(-1) - \frac{2}{3}\varphi''(\eta).$$
6. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi).$$
Indication : On pourra poser $\varphi(s) = f(\frac{b-a}{2}s + \frac{a+b}{2})$.
7. **Question bonus :** Considérons la subdivision de $[a,b]$ définie par $y_j = a + j\frac{b-a}{N}$ avec $j = 0,..,N$. La méthode des trapèzes consiste à approcher l'intégrale de f sur $[a,b]$ comme suit :
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(y_j) + f(y_{j+1})}{2}.$$
Expliquer le principe d'obtention de cette formule.
8. **Question bonus :** Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que
$$\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f(y_j) + f(y_{j+1})}{2} \right| \le h^2 \frac{b-a}{12} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$
où $h = \frac{b-a}{N}$ est le pas de la subdivision.
Indication : on pourra écrire que $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x)\mathrm{d}x$ *et utiliser la formule de la question 6 sur chaque intervalle* $[y_j, y_{j+1}]$.