Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2019-2020

Analyse Réelle, L3 Mathématiques pour l'enseignement — 21 Octobre 2019. Durée : 1 h 30

Partiel n° 1

Question de Cours :

1. Rappeler la définition d'un ensemble dénombrable.
2. Montrer que $2\mathbb{N}$ est dénombrable.
3. Rappeler la définition d'un ouvert dans un espace métrique (X, d).

Exercice 1. Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}_+$.
Soit

$$D := AB = \{ab \,; a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que $\sup D = \sup A \sup B$.

Exercice 2. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ strictement croissante, tel que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(u+v) \leq \varphi(u) + \varphi(v)$ pour tout $u, v \geq 0$.

1. Soit X un ensemble. Montrer que si d est une distance sur X alors $d' = \varphi \circ d$ est également une distance sur X.
2. En déduire que
$$\begin{array}{cccc} d_1 & : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & (x,y) & \mapsto & d_1(x,y) = \ln(1 + |x-y|) \end{array}$$
est une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et que sa limite l vérifie $\frac{1}{2} \leq l \leq 1$.
4. Soit $K = \{u_n ; n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$.
   a. Montrer que K est un compact.
   b. Montrer que l est un point d'accumulation de K càd $l \in K^{'}$.

Exercice 4. Discuter, selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la nature de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ de terme général

$$u_n = \frac{a^n}{2^n(1+\sqrt{n})}.$$

Indication : Pour $a \neq 0$, commencer par étudier la convergence absolue en utilisant la règle de D'Alembert.