Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2020-2021

Analyse Réelle, L3 Mathématiques pour l'enseignement — 20 Octobre 2020. Durée : 1 h 30

Contrôle Continu n° 1

Exercice 1 (Question de cours)**.** Soit $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ où $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$.

1. Soit $A = \{n \in \mathbb{N}; n \notin f(n)\}$. Montrer que $A \notin Imf$.
2. En déduire que f n'est pas surjective.

Exercice 2. Sur $\mathbb{R}$, on considère la relation binaire suivante : $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow \exists\, n \in \mathbb{Z};\ y = 2^n x$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, la classe d'équivalence $\overline{x} = \{y \in \mathbb{R};\ x\mathcal{R}y\}$ est dénombrable.

Exercice 3. Trouver (et justifier votre réponse) la borne inférieure (infimum) et la borne supérieure (supremum) de

1. $A = \{2 + \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 + x - 1 \geq 0\}$.

Exercice 4. Etudier la convergence et chercher dans le cas échéant les limites des suites suivantes $(u_n)_n$ où :

1. $u_n = \frac{5^n + n^{100}}{3^n + 5}$
2. $u_n = n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$
3. $u_n = n^{(-1)^n}$.

Exercice 5. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ croissante convergeant vers l et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. a. Montrer que $v_n \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   b. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $v_{2n} \geq \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.
3. En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.

Exercice 6. Soit $E = C^1([-1;1], \mathbb{R}) := \{f : [-1;1] \to \mathbb{R}; f$ dérivable sur $[-1;1]$ et f' continue $\}$.
On considère l'application $N : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E, \quad N(f) = |f(0)| + \sup_{t\in[-1,1]} |f'(t)|.$$

Montrer que N est une norme sur E.