Fiche 1 : Fonctions, Nombres Réels, Bornes Supérieurs et Inférieurs

Exercice 1. Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble X. On suppose que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 2. Montrer que la relation $\sim$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \sim y \Leftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\sim$.

Exercice 3. Montrer que la relation $\sim$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \sim y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\sim$.

Exercice 4. Soit X un ensemble. On définit sur $\mathscr{P}(X)$, l'ensemble des parties de X, la relation suivante :

$$A \sim B \Leftrightarrow A = B \text{ ou } A = B^c$$

où B^c est le complément de B (dans X). Montrer que $\sim$ est une rélation d'équivalence.

Exercice 5. Soient X et Y sont deux ensembles, $f : X \to Y$ et $\psi : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ définie par $\psi(A) = f(A) := \{f(a) : a \in A\}$. Montrer que l'application ψ est injective ssi. f est injective.

Exercice 6. Soient $f, g : X \to X$. Montrer que si f et g sont injectives, alors la composition $f \circ g$ l'est aussi. Donner un exemple où la réciproque est fausse.

Exercice 7. Soit $f : X \to X$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective ssi. f est surjective.

Exercice 8. Traduire en symboles mathématiques les propriétés suivantes :

1. $y \in f(A) \cup f(B)$
2. $y \in f(A) \cap f(B)$
3. $y \in f(A \cup B)$
4. $y \in f(A \cap B)$
5. $y \in f(\bigcup_{i \in I} A_i)$
6. $y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$
7. $y \in f(\bigcap_{i \in I} A_i)$
8. $y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

Exercice 9. Soit $f : X \to Y$ et $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de X et $\{B_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de Y. Montrer

1. $f(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
2. $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ avec égalité si f est injective.
3. $f^{-1}(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $f^{-1}(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
5. Si $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$ alors $f(A) \cap B = f(A \cap f^{-1}(B))$.

Exercice 10. Soient X et Y deux ensembles non vides. Montrer qu'il existe une injection de X dans Y ssi. il existe une surjection de Y dans X.

Exercice 11. Montrer que $\mathbb{N}$ est en bijection avec $\mathbb{N}^m$ pour tout $m \geq 1$.

Exercice 12. Trouver une bijection entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Exercice 13. Soit X un ensemble et $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ croissante, c'est à dire $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 14. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.
1. L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
2. L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
3. L'ensemble $\mathbb{R}$ est dénombrable.
4. L'ensemble $\mathbb{C}$ est dénombrable.
5. L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.

On pourra s'appuyer sur la non-dénombrabilité de $[0, 1[$.

Exercice 15. Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme P non nul à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est *transcendant*.
1. Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
2. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, et que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice 16. On pose $a_1 = \sqrt{2}$ et $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ pour $n \geq 1$. Montrer que a_n est irrationnel pour tout $n \geq 1$.

Exercice 17. Montrer que $\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

Exercice 18. On suppose A et B sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On pose

$$A + B = \{a + b \,:\, a \in A, b \in B\}$$

$$A - B = \{a - b \,:\, a \in A, b \in B\}.$$

Montrer les propriétés suivantes :
1. $A \subseteq B \Longrightarrow \sup A \leq \sup B$.
2. $A \subseteq B \Longrightarrow \inf A \geq \inf B$.

3. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
4. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$.
5. $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.
6. $\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$.
7. $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
8. $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.
9. $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.
10. $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$.

Exercice 19. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application bornée d'un ensemble X non vide vers $\mathbb{R}$. On pose

$$\sup_X f = \sup\{f(x) \ : \ x \in X\}$$

$$\inf_X f = \inf\{f(x) \ : \ x \in X\}.$$

Montrer les propriétées suivantes :

1. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont deux applications bornées, alors

$$\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g$$

$$\inf_X (f+g) \geq \inf_X f + \inf_X g$$

$$\sup_X (-f) = -\inf_X f$$

$$\sup_X (f-g) \leq \sup_X f - \inf_X g$$

2. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont deux applications bornées, alors

$$|\sup_X f - \sup_X g| \leq \sup_X |f-g|$$

et

$$|\inf_X f - \inf_X g| \leq \sup_X |f-g|$$

3. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$ sont deux applications bornées et $|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|$ pour tout $x, y \in X$, alors

$$\sup_X f - \inf_X f \leq \sup_X g - \inf_X g.$$

Exercice 20. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = [a_n, b_n]$ avec $a_n \leq b_n$. On suppose $I_{n+1} \subseteq I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. **Indication :** On peut considérer $\alpha = \sup\{a_1, a_2, \ldots\}$.