FONDAMENTAUX DES MATHEMATIQUES II

PROGRAMME DE L'UNITE D'ENSEIGNEMENT :

Calcul matriciel. Operations, inverse, opérations élémentaires. Calcul de l'inverse. Interprétation matricielle d'un système linéaire.

Espaces vectoriels. Définition d'un corps commutatif (on se limitera à Q, R et C dans ce cours). Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Familles libres, génératrices, bases (on se limitera à des familles finies). Somme, somme directe, sous-espaces supplémentaires. Espaces vectoriels de dimension finie. Exemples d'espaces vectoriels : R^n, espaces de fonctions, de suites (suites récurrentes linéaires d'ordre deux), $K_n[X]$.

Applications linéaires. Définition, matrice d'une application linéaire, noyau, image, caractérisation de l'injectivité. Image d'une famille libre/génératrice/base, rang, théorème du rang. Retour sur les matrices : rang/noyau d'une matrice, transposition, $rg(A) = rg({}^tA)$, trace, changement de base, matrices équivalentes, matrices semblables. Endomorphismes, exemples : projections, symétries, rotations.

Les réels. Nombres décimaux, rationnels, approximation des réels par des nombres décimaux à 10^{-n} près. Borne supérieure/inferieure, application aux suites monotones (preuve) et au théorème des valeurs intermédiaires.

Fractions rationnelles. Forme irréductible d'une fraction rationnelle, fonction rationnelle, degré, partie entière, zéros, pôles, existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur C et R (admis, on évitera toute technicité excessive dans les exemples).

Fonctions réelles. Réciproques des fonctions usuelles (arcsin, arccos, arctan). Comparaison locale des fonctions (o, O, □). Dérivées successives, fonctions de classe C^n et C^∞.

Intégration. Fonctions en escaliers, Fonctions continues par morceaux. Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment. Sommes de Riemann : si f : [a, b] → R est continue par morceaux alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(t)dt$$

Preuve dans le cas où f est C^1. Primitives. Intégration par parties, changement de variables.

Formules de Taylor. Formule de Taylor reste intégrale à l'ordre n pour les fonctions C^{n+1}, inégalité de Taylor Lagrange et formule de Taylor-Young pour ces fonctions. Développements limités et exemple de développements asymptotiques.

Équations différentielles. Équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients non constants. Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.