Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

L3 - Algèbre et Mathématiques Discrètes

Examen terminal - deuxième session - test 1

Jeudi 25 juin janvier 2020 de 14h00 à 16h00

Exercice 1.

a) 10 joueurs de tennis veulent jouer un double.

1. Combien de couples distincts peut-on former ?
2. Une fois les 5 couples formées, combien de matchs distincts peut-on disputer ?

b) D'un groupe de 8 femmes et 6 hommes, il faut choisir une commission formée par 3 femmes et 3 hommes.

1. Combien de commissions distinctes peut-on former ?
2. Et si 2 des hommes refusent de travailler ensemble ?
3. Et si 1 homme et 1 femme refusent de travailler ensemble ?

Exercice 2. Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$, $n > 1$.

1. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.
2. Montrer que 13 divise $3^{126} + 5^{126}$.

Exercice 3. Soient $n \geq k \geq 1$ deux nombres entiers. Une involution $\sigma \in S_n$ est une permutation telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$.

(a) On note le nombre d'involutions de S_n par $\mathrm{invol}(n)$, et on pose $\mathrm{invol}(0) = \mathrm{invol}(1) = 1$.

1. Montrer que $\mathrm{invol}(n+1) = \mathrm{invol}(n) + n \cdot \mathrm{invol}(n-1)$.
2. Écrire la liste des involutions de S_4.
3. Le sous-ensemble des involutions $\mathrm{Invol}(n)$ dans S_n forme-t-il un sous-groupe de S_n ?

(b) Soient $\sigma = (12)(34)$ et $\tau = (12)(45)$ deux involutions de S_5.

1. Calculer $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\sigma\tau\sigma$ et $\tau\sigma\tau$.
2. En déduire l'ordre de $H :=< \sigma, \tau >$ le sous-groupe engendré par σ et τ et écrire la liste des éléments de H.
3. Trouver un sous-groupe d'ordre 3 dans H.

Exercice 4. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau unitaire commutatif non-nul. Soit P une partie non-vide de A. On pose :

$$E(P) = \{a \in A \mid x \cdot a = 0 \text{ pour tout } x \in P\}.$$

1. Montrer que $E(P)$ est un idéal de A.
2. Soit α un idempotent de A, i.e un élément tel que $\alpha^2 = \alpha$, et soit $I = \alpha A = \{\alpha \cdot a \mid a \in A\}$ l'idéal de A engendré par α. On note $J = E(I)$. Montrer que :
   (a) $I \cap J = \{0\}$
   (b) Tout élément de A est la somme d'un élément de I et d'un élément de J.