Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

L3 - Algèbre et Mathématiques Discrètes

Examen terminal

MARDI 7 JANVIER 2020 DE 8H00 À 11H00

Exercice 1. On considère l'ensemble G des applications $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$f_{\alpha,\beta}(z) := \alpha z + \beta,$$

où $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$ muni de la loi de composition des applications.

1. Montrer que G est un groupe pour cette loi.
2. Donner un exemple d'un élément d'ordre 2 de ce groupe.
3. Donner un exemple d'un sous-groupe H de G d'ordre 4.
4. À quelle condition l'element $f_{\alpha,\beta}$ de G est un element d'ordre fini ?
5. Le groupe G est-il commutatif ?

Exercice 2. On considère l'anneau $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

1. Donner la liste des éléments inversibles de l'anneau A.
2. Donner la liste des diviseurs de zero de A.
3. On rappelle qu'un élément idempotent de A est un élément a qui vérifie $a^2 = a$. Donner la liste des éléments idempotents de A.
4. Donner la liste des éléments nilpotents de A.
5. Donner la liste des idéaux de A et montrer qu'ils sont tous des idéaux principaux.

Exercice 3. Soient $n \geq k \geq 1$ deux nombres entiers et soit $c(n,k)$ le nombre de permutations de S_n qui se décomposent comme le produit de k cycles disjoints. Par exemple, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1,2)(3)(4,6,5)$ est le produit de 3 cycles disjoints.

(a) On veut trouver une formule pour $c(n,1)$.

1. Écrire la liste des permutations de S_3 qui ont 1 seul cycle. En déduire $c(3,1)$.
2. Écrire la liste des permutations de S_4 qui ont 1 seul cycle. En déduire $c(4,1)$.
3. Montrer que $c(n,1) = (n-1)!$

(b) On veut trouver une formule pour $c(n,n-1)$.

1. Écrire la liste des permutations de S_3 qui ont 2 cycles. En déduire $c(3,2)$.
2. Écrire la liste des permutations de S_4 qui ont 3 cycles. En déduire $c(4,3)$.
3. Montrer que $c(n,n-1) = \binom{n}{2}$.

(c) On pose $c(0,0) = 1$ et $c(n,0) = 0$ pour $n \geq 1$. Montrer que pour $n \geq k \geq 1$,

$$c(n,k) = c(n-1,k-1) + (n-1)c(n-1,k).$$

(d) En utilisant les points précédents en déduire la valeur de $c(5,3)$.

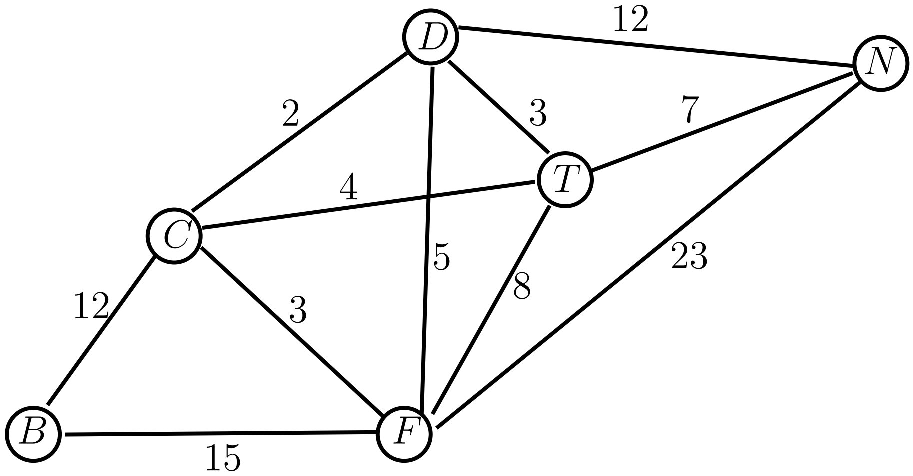

Figure 1 – Le graphe $\widetilde{G}$

Exercice 4. Les trois questions suivantes (a), (b) et (c) sont indépendantes.

On rappelle qu'un graphe est dit simple lorsque, pour l'ensemble des sommets du graphe, il y a au plus une arête entre deux sommets distincts et pas de boucle.

(a) Dessiner tous les graphes simples sur 2 et 3 sommets. Ensuite, montrer que pour $n \geq 2$ il existe $2^{\binom{n}{2}}$ graphes simples à n sommets.

(b) Soit G un graphe simple avec 10 sommets et 28 arêtes.

1. En utilisant le principe des tiroirs montrer que il existe dans G deux sommets X et Y de degré au moins 6.
2. En déduire que le graphe G contient un cycle de longueur 4. Indication : on pourra vérifier qu'il existe deux autres sommets A et B de G adjacents à la fois à X et à Y.

(c) Soit $\widetilde{G} = (V, E)$ le graphe en Figure 1.

1. Est-il possible passer par les six sommets en passant une fois et une seule par chaque arête ? Si la réponse est affirmative, donner un exemple de trajet possible.
2. En utilisant l'algorithme de Dijkstra, indiquer un chemin qui minimise la distance du trajet entre le sommet B et le sommet N, ainsi que la distance de B de tous les autres sommets de $\widetilde{G}$.