Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2019-2020

Analyse Réelle, L3 Mathématiques pour l'enseignement 16 Janvier 2020.

Contrôle Final-Jeudi 16 Janvier 2020

durée : 3 h

L'usage de tout document et de tout matériel électronique est interdit.

Exercice 1 (Question de Cours)**.** Soient (X, d) et (X', d') deux espaces métriques.

1. Rappeler la définition d'une fonction continue $f : X \to X'$.
2. Soit $f : X \to X'$ une fonction. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   a) f est continue
   b) $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X pour tout ouvert U de X'.
   c) $f^{-1}(V)$ est un fermé de X pour tout fermé V de X'.

Exercice 2 (Question de TD)**.** On définit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Démontrer que f peut se prolonger par continuité sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on notera f ce prolongement.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f n'est pas deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
4. Justifier que $f(x) = \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Exercice 3. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Pour $A \subseteq X$ rappeler la définition de l'adhérence de A (notée $\overline{A}$).
2. Soient A et B deux parties de X. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ puis $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.
3. Soient A et B deux parties de X. On suppose que $\inf\{d(a, b)\ :\ a \in A,\ b \in B\} > 0$. Montrer qu'il existe deux parties ouvertes U, V de X telles que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Exercice 4. Soit $A \subseteq \mathbb{N}$. On définit la densité inférieure de A, $\underline{\mathrm{d}}(A)$, par

$$\underline{\mathrm{d}}(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n}$$

Le but de cet exercice est de montrer que si $\underline{\mathrm{d}}(A) > 0$ alors $\sum_{k\in A} \frac{1}{k} = +\infty$.

1. Rappeler la définition du $\liminf_{n\to\infty} a_n$ d'une suite bornée de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour le reste de l'exercice on suppose que $\underline{\mathrm{d}}(A) > 0$.

2. Montrer qu'il existe deux entiers naturels $m, N \in \mathbb{N}$ tels que

$$\frac{|A \cap \{1, 2, \ldots, n\}|}{n} > \frac{1}{m}$$

   pour tout $n \geq N$.

3. En déduire que
$$\sum_{k\in A\cap\{1,2,\dots,mN\}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=(m-1)N+1}^{mN} \frac{1}{k}.$$
<u>Indication</u> : L'ensemble $A\cap\{1,2,\dots,mN\}$ contient au moins N éléments.

4. De même montrer que pour tout $j\geq 2$ on a
$$\sum_{k\in A\cap\{1,2,\dots,jmN\}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=(m-1)N+1}^{mN} \frac{1}{k} + \sum_{k=(2m-1)N+1}^{2mN} \frac{1}{k} + \cdots + \sum_{k=(jm-1)N+1}^{jmN} \frac{1}{k}.$$

5. En déduire que
$$\sum_{k\in A} \frac{1}{k} \geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=(jm-1)N+1}^{jmN} \frac{1}{k}.$$

6. Pour $i=1,2,\dots,m$, on pose
$$S_i = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=(jm-p)N+1}^{(jm-p+1)N} \frac{1}{k}.$$
Montrer que $S_1 \leq S_2 \leq \cdots \leq S_m$.

7. Montrer que
$$\sum_{k\in A} \frac{1}{k} = +\infty.$$
<u>Indication</u> : On peut montrer que si $S_1 < +\infty$ alors $S_i < +\infty$ pour tout $i=1,2,\dots,m$ et que $S_1+S_2+\cdots+S_m = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Exercice 5. Déterminer les primitives suivantes :

1. $$\int \frac{e^x+\cos x}{e^x+\sin x}\,dx.$$

2. $$\int \sin(\sqrt{x})\,dx.$$

3. $$\int e^{x+e^x} + e^{x-e^x}\,dx.$$

4. $$\int \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx.$$

5. **Bonus :**
$$\int \sqrt{\tan x}\,dx.$$